Matemática

9.º ano

Ministério da Educação

ONLINE
+OFFLINE
+DOWNLOAD

Manual Digital na app **EV Smart Book** e em **www.escolavirtual.cv**

Matemática

9.º ano

Acede ao teu manual digital

Acesso e condições de utilização em
www.escolavirtual.cv

Podes também aceder ao teu livro através da **app EV Smart Book**

Disponível no Google Play

Descarregar na App Store

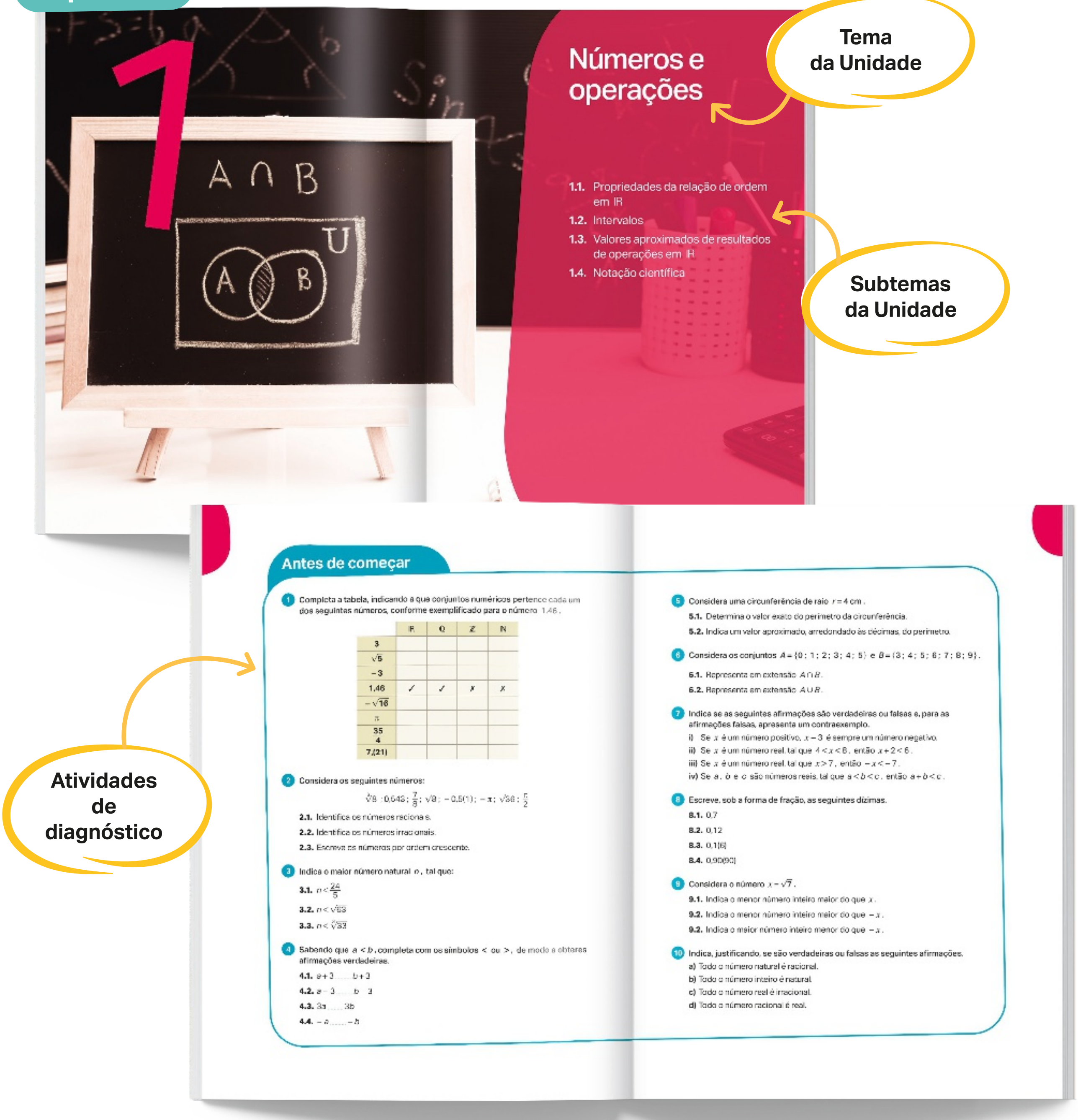
Ministério da Educação

Conhece o teu manual

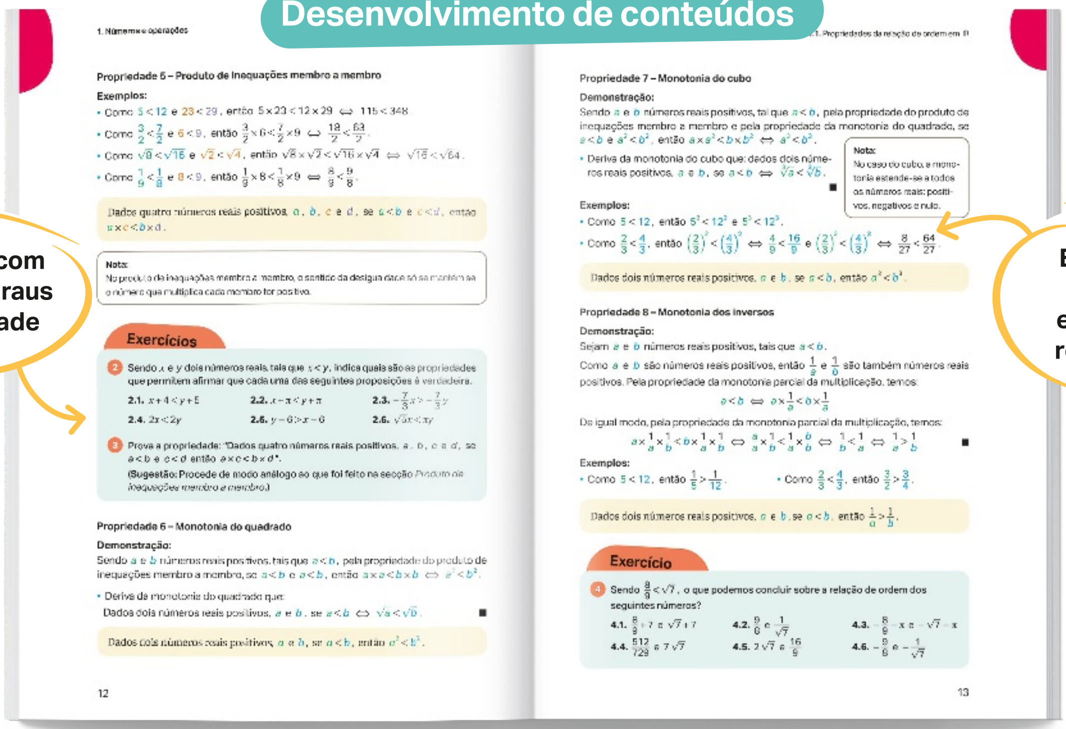
Este manual ajuda-te neste percurso e é fundamental para a tua aprendizagem, independentemente da área que venhas a escolher no futuro. O manual está estruturado em seis temas, de acordo com o plano curricular do ensino secundário. Os temas (Funções, Sequências e Sucessões I, Álgebra, Números e Operações, Geometria e Medida, Funções, Sequências e Sucessões II e Organização e Tratamento de Dados) dividem-se em subtemas.

Cada tema e subtema é composto por…

Separador



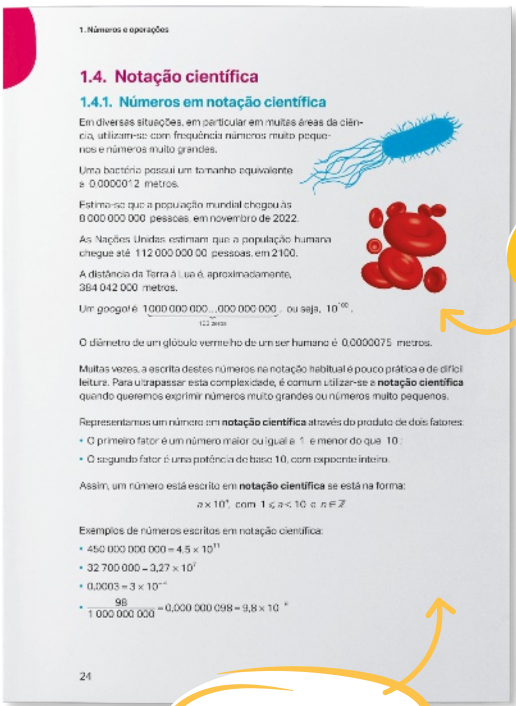
Desenvolvimento de conteúdos



Exercícios com diferentes graus de dificuldade

Exemplos de exercícios resolvidos

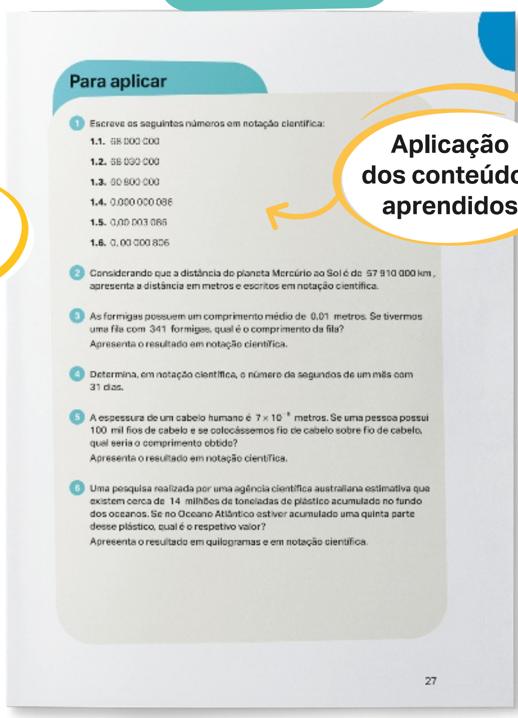
Ao longo do teu manual…



Imagens ilustrativas

Explicação dos conteúdos

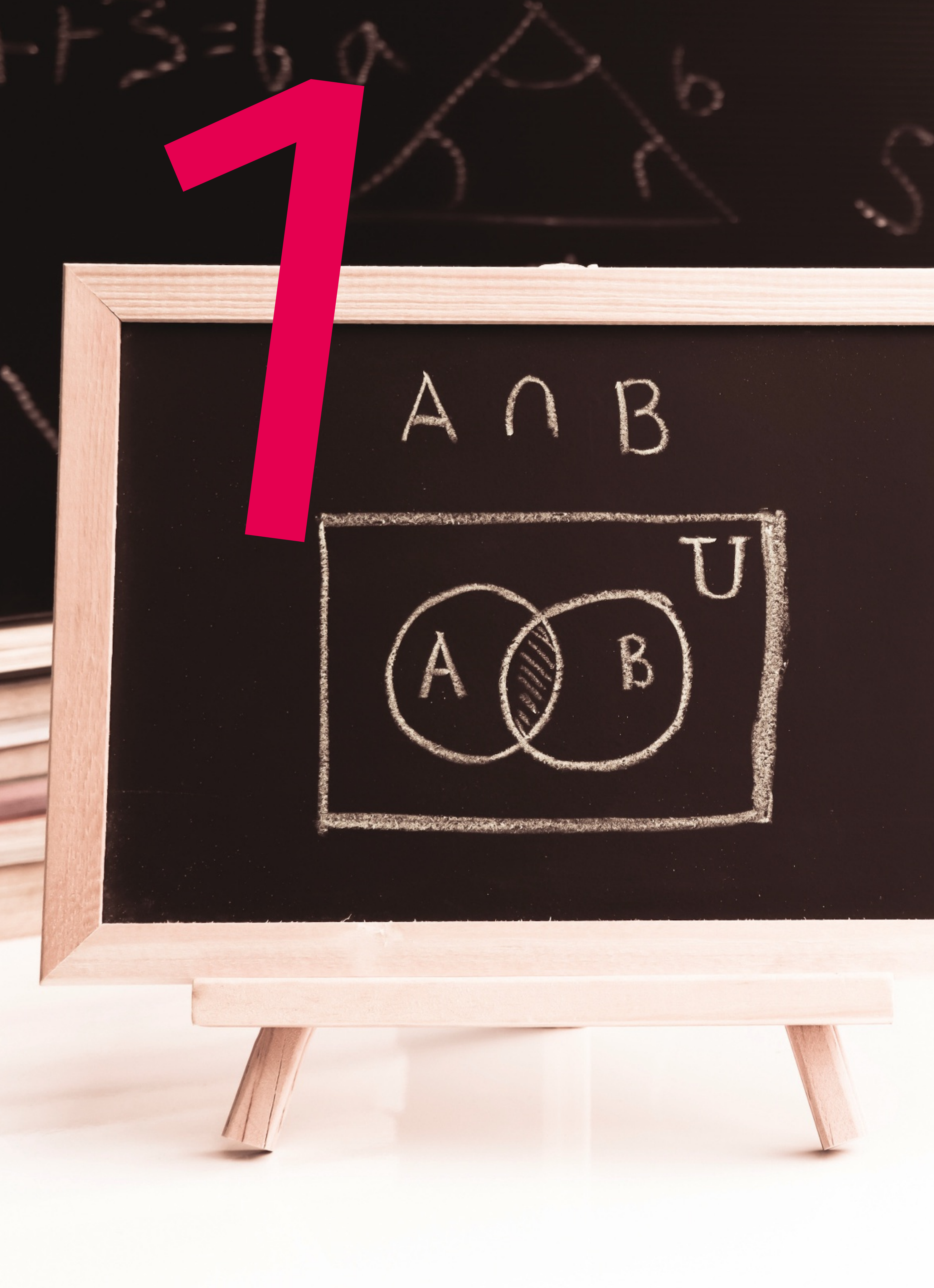
Para aplicar

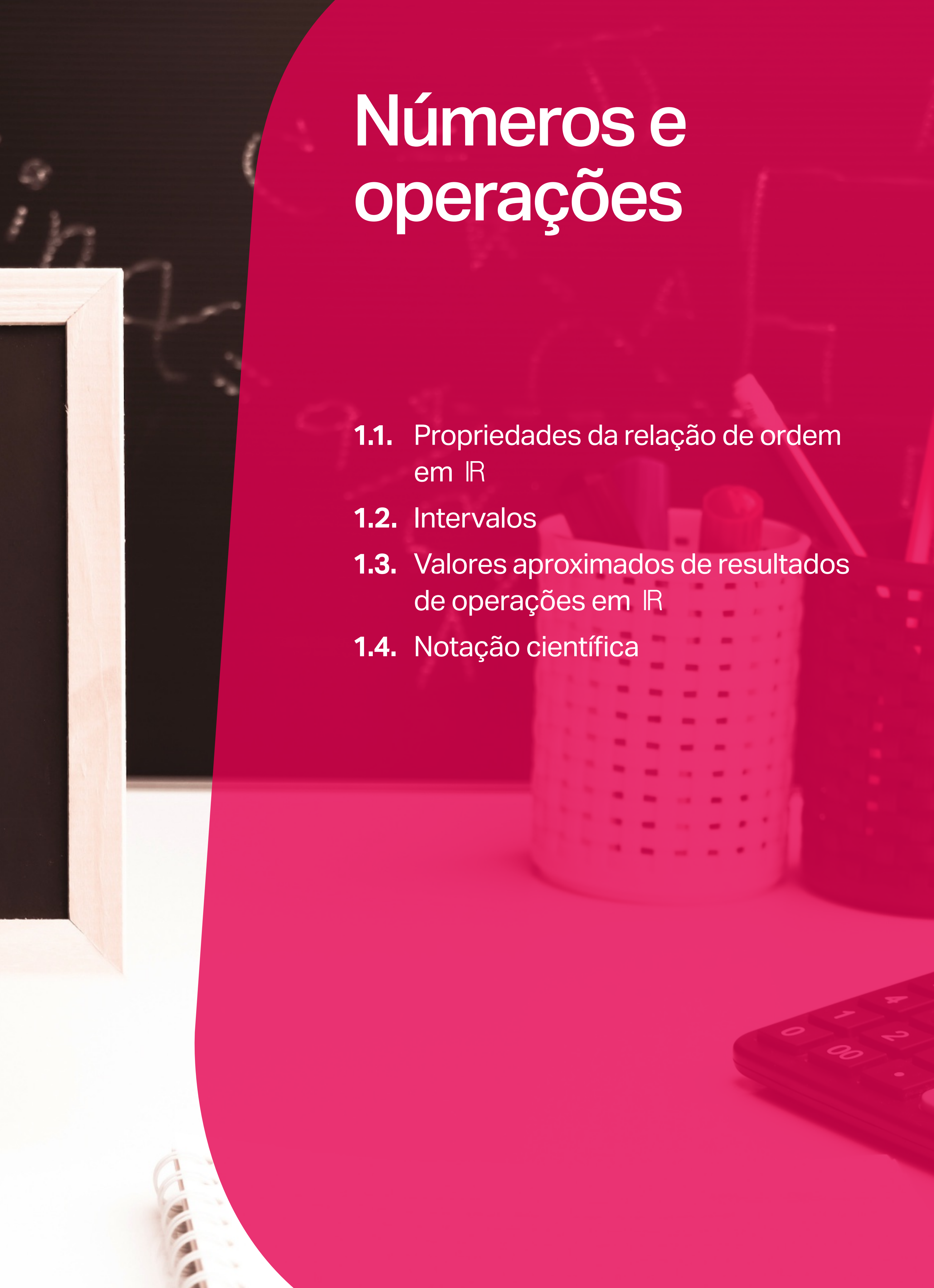


Aplicação dos conteúdos aprendidos

Índice

1





Números e operações

1.1. Propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$

1.2. Intervalos

1.3. Valores aproximados de resultados de operações em $\mathbb{R}$

1.4. Notação científica

Antes de começar

1 Completa a tabela, indicando a que conjuntos numéricos pertence cada um dos seguintes números, conforme exemplificado para o número $1{,}46$.

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$
3				
$\sqrt{5}$				
-3				
$1{,}46$	✓	✓	✗	✗
$-\sqrt{16}$				
π				
$\frac{35}{4}$				
$7{,}(21)$				

2 Considera os seguintes números:

$$\sqrt[3]{8}\ ;\ \ 0{,}543\ ;\ \ \frac{7}{8}\ ;\ \ \sqrt{8}\ ;\ \ -0{,}5(1)\ ;\ \ -\pi\ ;\ \ \sqrt{36}\ ;\ \ \frac{\pi}{2}$$

2.1. Identifica os números racionais.

2.2. Identifica os números irracionais.

2.3. Escreve os números por ordem crescente.

3 Indica o maior número natural n, tal que:

3.1. $n < \frac{24}{5}$

3.2. $n < \sqrt{63}$

3.3. $n < \sqrt[3]{33}$

4 Sabendo que $a < b$, completa com os símbolos $<$ ou $>$, de modo a obteres afirmações verdadeiras.

4.1. $a + 3$ .... $b + 3$

4.2. $a - 3$ .... $b - 3$

4.3. $3a$ .... $3b$

4.4. $-a$ .... $-b$

5 **Considera um círculo de raio $r = 4\text{ cm}$.**

5.1. Determina o valor exato do perímetro.

5.2. Indica um valor arredondado às décimas, do perímetro.

6 **Considera os conjuntos $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ e $B = \{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$.**

6.1. Representa em extensão $A \cap B$.

6.2. Representa em extensão $A \cup B$.

7 **Indica se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e, para as afirmações falsas, apresenta um contraexemplo.**

i) Se x é um número positivo, $x - 3$ é sempre um número negativo.

ii) Se x é um número real, tal que $4 < x < 8$, então $x + 2 < 6$.

iii) Se x é um número real, tal que $x > 7$, então $-x < -7$.

iv) Se a, b e c são números reais, tal que $a < b < c$, então $a + b < c$.

8 **Escreve, sob a forma de fração, as seguintes dízimas.**

8.1. 0,7

8.2. 0,12

8.3. 0,1(6)

8.4. 0,90(90)

9 **Considera o número $x = \sqrt{7}$.**

9.1. Indica o menor número inteiro maior do que x.

9.2. Indica o menor número inteiro maior do que $-x$.

9.3. Indica o maior número inteiro menor do que $-x$.

10 **Indica, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.**

a) Todo o número natural é racional.

b) Todo o número inteiro é natural.

c) Todo o número real é irracional.

d) Todo o número racional é real.

1 Números e operações

Manual Digital

Vídeos
Propriedades da relação de ordem na adição

Propriedades da relação de ordem na multiplicação

Exercícios
Aplicar a propriedade da relação de ordem na adição

Aplicar a propriedade da relação de ordem na multiplicação

Neste tema vamos conhecer melhor os números reais. À semelhança dos números racionais, os números reais também representam quantidades, pelo que existe uma relação de ordem entre eles. Neste capítulo vamos estudar as propriedades de ordem em $\mathbb{R}$.

Também, para melhor podermos representar conjuntos de números reais vamos definir intervalo de números reais e realizar operações conjuntistas com os intervalos.

O cálculo com números reais, com e sem calculadora, é por vezes distinto do cálculo com apenas números inteiros ou racionais. Recorrendo a valores exatos e a valores aproximados e em diferentes representações vamos realizar operações com números reais.

No último subtema, vamos abordar a notação científica, uma representação de números reais utilizada em contextos matemáticos e não matemáticos.

1.1. Propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$

Propriedade 1 – Monotonia da adição
Exemplos:

- $5 < 12 \Leftrightarrow 5 + 4 < 12 + 4 \Leftrightarrow 9 < 16$
- $5 < 12 \Leftrightarrow 5 + \left(-\frac{4}{5}\right) < 12 + \left(-\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \frac{25}{5} - \frac{4}{5} < \frac{60}{5} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{21}{5} < \frac{56}{5}$
- $5 < 12 \Leftrightarrow 5 + \sqrt{2} < 12 + \sqrt{2}$
- $5 < 12 \Leftrightarrow 5 - \pi < 12 - \pi$
- $\frac{7}{4} < \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{4} + \frac{3}{4} < \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{10}{4} < \frac{12}{4}$

Dados três números reais, a, b e c, se $a < b$ então $a + c < b + c$.

Propriedade 2 – Monotonia parcial da multiplicação
Exemplos:

- $5 < 12 \Leftrightarrow 5 \times 4 < 12 \times 4 \Leftrightarrow 20 < 48$
- $\frac{7}{4} < \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{4} \times \frac{2}{3} < \frac{9}{4} \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{14}{12} < \frac{18}{12}$
- $\sqrt{3} < \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{3} \times 5 < \sqrt{6} \times 5 \Leftrightarrow 5\sqrt{3} < 5\sqrt{6}$

Dados três números reais, a, b e c, com $c > 0$, se $a < b$, então $a \times c < b \times c$.

Propriedade 3 – Monotonia parcial da multiplicação

Exemplos:

- $5 < 12 \Leftrightarrow 5 \times (-4) > 12 \times (-4) \Leftrightarrow -20 > -48$
- $\frac{7}{4} < \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) > \frac{9}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow -\frac{14}{12} > -\frac{18}{12}$
- $\sqrt{2} < 7 \Leftrightarrow \sqrt{2} \times (-3) > 7 \times (-3) \Leftrightarrow -3\sqrt{2} > -21$
- $-\frac{8}{3} < \frac{8}{3} \Leftrightarrow -\frac{8}{3} \times (-\pi) > \frac{8}{3} \times (-\pi) \Leftrightarrow \frac{8\pi}{3} > -\frac{8\pi}{3}$

Dados três números reais, a, b e c, com $c < 0$, se $a < b$, então $a \times c > b \times c$.

Exercício

1 Sabendo que a e b são números reais, tais que $a < b$, completa as seguintes expressões com os símbolos $=$, $>$ ou $<$.

1.1. $a + 14$ .... $b + 14$	**1.2.** $a + \frac{2}{3}$ .... $b + \frac{2}{3}$	**1.3.** b .... a
1.4. $a - 2$ .... $b - 2$	**1.5.** $a \times 3$ .... $b \times 3$	**1.6.** $4b$ .... $4a$
1.7. $\frac{a}{6}$ .... $\frac{b}{6}$	**1.8.** $a + (-5)$ .... $b + (-5)$	**1.9.** $b + \sqrt{3}$ .... $a + \sqrt{3}$
1.10. $a \times 0$ .... $b \times 0$	**1.11.** $a + a$ .... $b + a$	**1.12.** $-a$ .... $-b$
1.13. $\frac{a}{-7}$ .... $\frac{b}{-7}$	**1.14.** $\frac{3}{a}$ .... $\frac{3}{b}$	

Propriedade 4 – Adição de inequações membro a membro

Dados quatro números reais, a, b, c e d, se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.

Demonstração:

Sejam a, b, c e d números reais, tais que $a < b$ e $c < d$.

Pela propriedade da monotonia da adição, temos que: $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

Do mesmo modo, pela propriedade da monotonia da adição, temos que:

$$c < d \Leftrightarrow c + b < d + b \Leftrightarrow b + c < b + d$$

Assim, verificamos que: $a + c < b + c < b + d$

Pela propriedade transitiva, concluímos que: $a + c < b + d$ ■

Exemplos:

- Como $5 < 12$ e $23 < 29$, então $5 + 23 < 12 + 29 \Leftrightarrow 28 < 41$.
- Como $5 < 12$ e $-7 < -4$, então $5 + (-7) < 12 + (-4) \Leftrightarrow -2 < 8$.
- Como $\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$ e $\frac{1}{2} < \frac{9}{2}$, então $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} < \frac{5}{4} + \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < \frac{23}{4}$.
- Como $\sqrt{3} < \sqrt{5}$ e $0{,}1 < 0{,}11$, então $\sqrt{3} + 0{,}1 < \sqrt{5} + 0{,}11$.

Manual Digital

Vídeo
Relação de ordem envolvendo quadrados e cubos

Exercício
Aplicar as propriedades da relação de ordem envolvendo quadrados

Propriedade 5 – Multiplicação de inequações membro a membro

Exemplos:

- Como $5 < 12$ e $23 < 29$, então $5 \times 23 < 12 \times 29 \Leftrightarrow 115 < 348$.
- Como $\frac{3}{2} < \frac{7}{2}$ e $6 < 9$, então $\frac{3}{2} \times 6 < \frac{7}{2} \times 9 \Leftrightarrow \frac{18}{2} < \frac{63}{2}$.
- Como $\sqrt{8} < \sqrt{16}$ e $\sqrt{2} < \sqrt{4}$, então $\sqrt{8} \times \sqrt{2} < \sqrt{16} \times \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{16} < \sqrt{64}$.
- Como $\frac{1}{9} < \frac{1}{8}$ e $8 < 9$, então $\frac{1}{9} \times 8 < \frac{1}{8} \times 9 \Leftrightarrow \frac{8}{9} < \frac{9}{8}$.

Dados quatro números reais positivos, a, b, c e d, se $a < b$ e $c < d$, então $a \times c < b \times d$.

Exercícios

2 Sendo x e y dois números reais, tais que $x < y$, indica quais são as propriedades que permitem afirmar que cada uma das seguintes proposições é verdadeira.

2.1. $x + 4 < y + 5$

2.2. $x + \pi < y + \pi$

2.3. $-\frac{7}{3}x > -\frac{7}{3}y$

2.4. $2x < 2y$

2.5. $y - 6 > x - 6$

2.6. $\sqrt{5}x < \pi y$

3 Prova a propriedade: "Dados quatro números reais positivos, a, b, c e d, se $a < b$ e $c < d$ então $a \times c < b \times d$."

(Sugestão: Procede de modo análogo ao que foi feito na secção *Multiplicação de inequações membro a membro*.)

Propriedade 6 – Monotonia do quadrado

Dados dois números reais positivos, a e b, se $a < b$, então $a^2 < b^2$.

Demonstração:

Sendo a e b números reais positivos, tais que $a < b$, pela propriedade do produto de inequações membro a membro, se $a < b$ e $a < b$, então $a \times a < b \times b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

- A partir da monotonia do quadrado, podemos concluir que:

Dados dois números reais positivos, a e b, se $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$. ■

Exemplos:

- Como $5 < 12$, então $5^2 < 12^2$.
- Como $\frac{2}{3} < \frac{4}{3}$, então $\left(\frac{2}{3}\right)^2 < \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{4}{9} < \frac{16}{9}$.

Propriedade 7 – Monotonia do cubo

Dados dois números reais positivos, a e b, se $a < b$, então $a^3 < b^3$.

Demonstração:

Sendo a e b números reais positivos, tais que $a < b$, pela propriedade do produto de inequações membro a membro e pela propriedade da monotonia do quadrado, se $a < b$ e $a^2 < b^2$, então $a \times a^2 < b \times b^2 \Leftrightarrow a^3 < b^3$.

- Deriva da monotonia do cubo que: dados dois números reais positivos, a e b, se $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$. ■

Nota:
No caso do cubo, a monotonia estende-se a todos os números reais: positivos, negativos e nulo.

Exemplos:

- Como $5 < 12$, então $5^3 < 12^3$.
- Como $\frac{2}{3} < \frac{4}{3}$, então $\left(\frac{2}{3}\right)^3 < \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{8}{27} < \frac{64}{27}$.

Propriedade 8 – Monotonia dos inversos

Dados dois números reais positivos, a e b, se $a < b$, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Demonstração:

Sejam a e b números reais positivos, tais que $a < b$.

Como a e b são números reais positivos, então $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$ são também números reais positivos. Pela propriedade da monotonia parcial da multiplicação, temos:

$$a < b \Leftrightarrow a \times \frac{1}{a} < b \times \frac{1}{a}$$

De igual modo, pela propriedade da monotonia parcial da multiplicação, temos:

$$a \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} < b \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{a} \times \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \times \frac{b}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$ ■

Exemplos:

- Como $5 < 12$, então $\frac{1}{5} > \frac{1}{12}$.
- Como $\frac{2}{3} < \frac{4}{3}$, então $\frac{3}{2} > \frac{3}{4}$.

Exercício

4 Sendo $\frac{8}{9} < \sqrt{7}$, o que podemos concluir sobre a relação de ordem dos seguintes números?

4.1. $\frac{8}{9} + 7$ e $\sqrt{7} + 7$
4.2. $\frac{9}{8}$ e $\frac{1}{\sqrt{7}}$
4.3. $-\frac{8}{9} - \pi$ e $-\sqrt{7} - \pi$
4.4. $\frac{512}{729}$ e $7\sqrt{7}$
4.5. $2\sqrt{7}$ e $\frac{16}{9}$
4.6. $-\frac{9}{8}$ e $-\frac{1}{\sqrt{7}}$

Manual Digital

Exercício
Aplicar as propriedades da relação de ordem envolvendo cubos

Vídeo
Relação de ordem em inversos de números reais

Exercício
Aplicar as propriedades da relação de ordem e inversos

Manual Digital

Vídeo
Intervalos de números reais

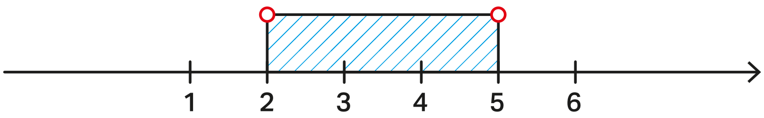
Exercício
Reconhecer intervalos abertos, fechados e semiabertos

1.2. Intervalos

1.2.1. Intervalos de números reais

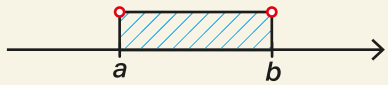
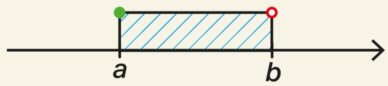
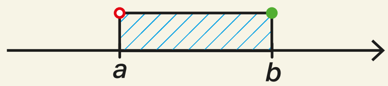
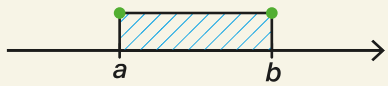
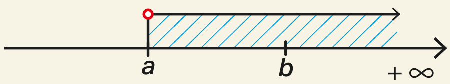
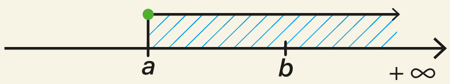
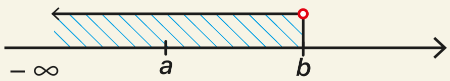
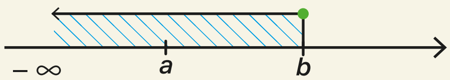
Quando consideramos a **condição** $2 < x < 5$, com $x \in \mathbb{R}$, estamos a considerar uma infinidade de números, racionais e irracionais, entre 2 e 5.

Como sabemos, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) e o conjunto dos pontos da reta real. Por outras palavras, é possível fazer corresponder a cada número real, um único ponto da reta real e, reciprocamente, a cada ponto da reta real, um e um só, número real. Assim, todos os números reais podem ser representados na reta real.
A figura seguinte mostra a representação na reta real de todos os números reais compreendidos entre 2 e 5.



Podemos também representar todos os números entre 2 e 5 na forma de um **intervalo** do seguinte modo: $]2\,;\,5[$.

De um modo geral, dados dois números reais a e b, com $a < b$, podemos representar o conjunto de números entre a e b na forma de uma condição, na forma de intervalo ou através da representação na reta real, como podemos ver na tabela seguinte.

Condição	Intervalo	Representação na reta real
$a < x < b$	$]a\,;\,b[$	
$a \leqslant x < b$	$[a\,;\,b[$	
$a < x \leqslant b$	$]a\,;\,b]$	
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a\,;\,b]$	
$x > a$	$]a\,;\,+\infty[$	
$x \geqslant a$	$[a\,;\,+\infty[$	
$x < b$	$]-\infty\,;\,b[$	
$x \leqslant b$	$]-\infty\,;\,b]$	

Recorda:

Símbolo	Designação
$+\infty$	"mais infinito"
$-\infty$	"menos infinito"

Atenção:

$]a\,;\,b[$	Intervalo aberto. $a \notin\,]a\,;\,b[$ $b \notin\,]a\,;\,b[$
$[a\,;\,b[$	Intervalo fechado em a e aberto em b. $a \in [a\,;\,b[$ $b \notin [a\,;\,b[$
$]a\,;\,b]$	Intervalo aberto em a e fechado em b. $a \notin\,]a\,;\,b]$ $b \in\,]a\,;\,b]$
$[a\,;\,b]$	Intervalo fechado. $a \in [a\,;\,b]$ $b \in [a\,;\,b]$

Manual Digital

Exercício
Relacionar representações gráficas e intervalos

Vídeo
Reunião e interseção de intervalos e conjunção e disjunção de condições

Se a e $b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, os números a e b denominam-se extremos do intervalo e à diferença $b - a$ dá-se o nome de **amplitude** do intervalo.

Exercícios

5 Escreve, na forma de intervalo, os conjuntos de números reais definidos pelas condições.

5.1. $5 < x < 21$

5.2. $-4 \leqslant x \leqslant 1$

5.3. $0 < x \leqslant \pi$

5.4. $-2 < x$

5.5. $x \geqslant 5$

5.6. $x < \frac{1}{3}$

5.7. $x \leqslant \sqrt{2}$

5.8. $x \geqslant \sqrt{2}$

6 Representa na reta real os seguintes intervalos.

6.1. $]2\,;\,\sqrt{10}]$

6.2. $[-\pi\,;\,\pi]$

6.3. $\left[\frac{3}{4}\,;\,1\right[$

6.4. $]-\infty\,;\,10[$

6.5. $[5\,;\,+\infty[$

6.6. $\left]\frac{2}{3}\,;\,\frac{7}{2}\right[$

6.7. $]-\infty\,;\,\sqrt{3}]$

6.8. $]0\,;\,10\,000[$

7 Indica quais dos seguintes intervalos têm amplitude igual a 7.

7.1. $[-4\,;\,3]$

7.2. $[-4\,;\,3[$

7.3. $[3\,;\,4]$

7.4. $[-3\,;\,4[$

7.5. $]1\,;\,8]$

7.6. $[-2\,;\,7[$

7.7. $]-7\,;\,0[$

7.8. $[-6\,;\,-1]$

8 Dá exemplo de um intervalo com amplitude igual a $3{,}5$.

Manual Digital

Exercícios
Relacionar intervalos com a conjunção e disjunção de condições

Identificar a reunião e a interseção de intervalos

1.2.2. Interseção e reunião de intervalos

A **interseção** de dois intervalos é o conjunto de números reais que pertencem simultaneamente aos dois intervalos.

A interseção dos intervalos A e B representa-se por $\boldsymbol{A \cap B}$.

$x \in A \cap B$ se e só se $x \in A \wedge x \in B$.

Recorda

Símbolo	Designação
$\cap$	"interseção"
$\cup$	"reunião"
$\wedge$	"e"
$\vee$	"ou"
$\varnothing$	"conjunto vazio"

A **reunião** de dois intervalos é o conjunto de números reais que pertencem a um intervalo ou a outro intervalo ou a ambos.

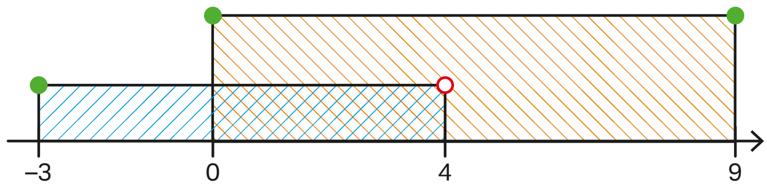
A reunião dos intervalos A e B representa-se por $\boldsymbol{A \cup B}$.

$x \in A \cup B$ se e só se $x \in A \vee x \in B$.

Exemplos:

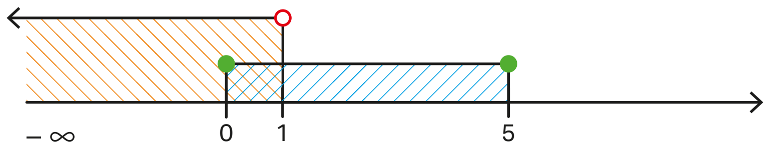
a) Sendo $A = [-3\,;\,4[$ e $B = [0\,;\,9]$,
então:

$A \cap B = [0\,;\,4[$ $\quad$ $A \cup B = [-3\,;\,9]$



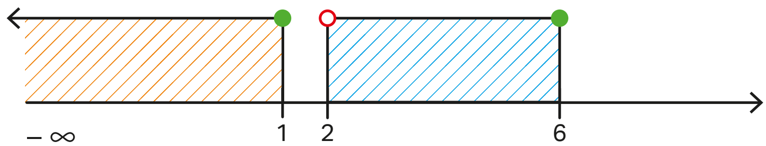
b) Sendo $C =]-\infty\,;\,1[$ e $D = [0\,;\,5]$,
então:

$C \cap D = [0\,;\,1[$ $\quad$ $C \cup D =]-\infty\,;\,5]$



c) Sendo $E =]-\infty\,;\,1]$ e $F =]2\,;\,6]$,
então:

$E \cap F = \varnothing$ $\quad$ $E \cup F =]-\infty\,;\,1] \cup]2\,;\,6]$



Podemos representar na forma de intervalo os subconjuntos de $\mathbb{R}$:

- Números reais positivos: $\mathbb{R}^+ =]0\,;\,+\infty[$
- Números reais negativos: $\mathbb{R}^- =]-\infty\,;\,0[$
- Números reais não negativos: $\mathbb{R}_0^+ = [0\,;\,+\infty[$
- Números reais não positivos: $\mathbb{R}_0^- =]-\infty\,;\,0]$
- Números reais: $\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$
- $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_0^- \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ = \varnothing$

Manual Digital

Exercícios
Indicar elementos de interseções e reuniões de intervalos

Determinar a interseção de intervalos de números reais

Exercícios

9 **Representa, na forma de um intervalo ou na forma de conjunto.**

9.1. $[-1\,;\,7[\,\cap\,]-7\,;\,1]$

9.2. $[0\,;\,7[\,\cap\,]-2\,;\,1{,}5[$

9.3. $[0\,;\,7[\,\cup\,]-2\,;\,1{,}5[$

9.4. $[0\,;\,+\infty[\,\cap\,[-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}]$

9.5. $]-\infty\,;\,3]\cup[1\,;\,+\infty[$

9.6. $]-4\,;\,3[\,\cap\,]-\infty\,;\,0]$

9.7. $]0\,;\,5[\,\cap\,]-3\,;\,1[$

9.8. $]-\infty\,;\,2[\,\cap\,]2\,;\,3]$

10 **Considera os intervalos $A = [-1\,;\,+\infty[$ e $B =]-3\,;\,4]$.**

10.1. Representa os intervalos numa reta numérica.

10.2. Determina $A \cap B$.

10.3. Determina $A \cup B$.

11 **Considera os intervalos $A =]2\,;\,7[$ e $B = [-3\,;\,4]$.**

11.1. Representa os intervalos A e B na forma de condições.

11.2. Indica o maior número inteiro que pertence a $A \cup B$.

11.3. Indica todos os números inteiros que pertencem a $A \cap B$.

12 **Escreve na forma de intervalo $A \cup B$ e $A \cap B$, sabendo que:**

$$A = \{x \in \mathbb{R}:\ -1 < x \leqslant 3\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{R}:\ 0 \leqslant x \leqslant 5\}$$

1.3. Valores aproximados de resultados de operações em $\mathbb{R}$

Manual Digital

Exercício
Determinar o valor aproximado por excesso

1.3.1. Valores aproximados e valores exatos

Um número irracional é uma dízima infinita não periódica. Quando utilizamos a calculadora para determinar o valor de um número **irracional**, obtemos um valor aproximado.

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{valor exato}} = \underbrace{1{,}4142135624}_{\text{valor aproximado}}$$

Recorda
Um **número irracional** não pode ser representado por uma fração.

Um **número irracional** é representado por uma dízima infinita não periódica.

Um número real tem um valor exato e pode ter vários valores aproximados.

$1{,}4$ é um valor aproximado de $\sqrt{2}$ às décimas, por defeito, pois $1{,}4 < \sqrt{2}$.

$1{,}5$ é um valor aproximado de $\sqrt{2}$ às décimas, por excesso, pois $1{,}5 > \sqrt{2}$.

Assim, podemos enquadrar $\sqrt{2}$ às décimas do seguinte modo: $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.

Do mesmo modo:

$1{,}41$ é um valor aproximado de $\sqrt{2}$ às centésimas, por defeito, pois $1{,}41 < \sqrt{2}$.

$1{,}42$ é um valor aproximado de $\sqrt{2}$ às centésimas, por excesso, pois $1{,}42 > \sqrt{2}$.

Assim, podemos enquadrar $\sqrt{2}$ às centésimas do seguinte modo: $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

1.3.2. Valores aproximados por arredondamento

Para determinarmos o **valor arredondado** de um número, devemos atender às seguintes regras:

- Se o primeiro algarismo a ser rejeitado na aproximação for 5, 6, 7, 8 ou 9, o último algarismo a considerar passa para o seguinte.
- Se o primeiro algarismo a ser rejeitado na aproximação for menor ou igual a 4, o último algarismo a considerar mantém-se.

Exemplo:

Consideremos o número real $x = 6{,}85396460$.

- 7 é um valor arredondado às unidades de x (porque o algarismo das décimas é 8).
- $6{,}9$ é um valor arredondado às décimas de x (porque o algarismo das centésimas é 5).
- $6{,}85$ é um valor arredondado às centésimas de x (porque o algarismo das milésimas é 3).

Exercícios

13 **Efetua os enquadramentos, conforme mostrado no subtema 1.3.1.**

13.1. De $\sqrt[3]{28}$ às centésimas.

13.2. De $\sqrt{54}$ às décimas.

13.3. De π às milésimas.

14 **Considera os números reais $\frac{7}{6}$; $\sqrt{24}$; $\sqrt[3]{208}$. Indica, para cada um dos números reais apresentados, um valor aproximado:**

14.1. às décimas, por defeito.

14.2. às milésimas, por excesso.

15 **Completa a seguinte tabela.**

<table>
<tr><th colspan="6">Valor exato: $\sqrt{5}$</th></tr>
<tr><th colspan="4">Valor aproximado de $\sqrt{5}$</th><th rowspan="3">Valor arredondado às unidades</th><th rowspan="3">Valor arredondado às centésimas</th></tr>
<tr><td colspan="2">às décimas por</td><td colspan="2">às centésimas por</td></tr>
<tr><td>defeito</td><td>excesso</td><td>defeito</td><td>excesso</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

16 **Indica se as afirmações são verdadeiras ou falsas e corrige as afirmações falsas.**

16.1. O valor aproximado às centésimas, por excesso, de $\frac{12}{7}$ é $1{,}71$.

16.2. $1{,}8$ é o valor arredondado às décimas de $\frac{12}{7}$.

16.3. O valor arredondado às décimas de $\sqrt{93}$ é $9{,}6$.

16.4. O valor arredondado às centésimas de $\sqrt[3]{178}$ é igual ao valor aproximado, por excesso, às centésimas de $\sqrt[3]{178}$.

1.3.3. Valores aproximados da soma

Vamos calcular valores aproximados de $\sqrt{2}+\sqrt{10}$ e determinar o erro da nossa aproximação.

Como $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$ e $3{,}1<\sqrt{10}<3{,}2$, então:

$$1{,}4+3{,}1<\sqrt{2}+\sqrt{10}<1{,}5+3{,}2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4{,}5<\sqrt{2}+\sqrt{10}<4{,}7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}+\sqrt{10}\in\,]4{,}5\,;\ 4{,}7[$$

Assim, $4{,}5$ é um valor aproximado por defeito de $\sqrt{2}+\sqrt{10}$, com erro inferior a $0{,}2$.

$$\text{Pois, } 4{,}5\in\left](\sqrt{2}+\sqrt{10})-0{,}2\,;\ (\sqrt{2}+\sqrt{10})+0{,}2\right[.$$

Do mesmo modo, $4{,}7$ é um valor aproximado por excesso de $\sqrt{2}+\sqrt{10}$, com erro inferior a $0{,}2$.

$$\text{Pois, } 4{,}7\in\left](\sqrt{2}+\sqrt{10})-0{,}2\,;\ (\sqrt{2}+\sqrt{10})+0{,}2\right[.$$

Nota
y é um valor aproximado de x com erro inferior a r $(r>0)$, quando $y\in\,]x-r\,;\ x+r[$.

1.3.4. Valores aproximados do produto

Vamos calcular valores aproximados de $3\sqrt{10}$ e determinar o erro da nossa aproximação.

Como $3{,}1<\sqrt{10}<3{,}2$, então:

$$3\times3{,}1<3\times\sqrt{10}<3\times3{,}2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9{,}3<3\sqrt{10}<9{,}6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{10}\in\,]9{,}3\,;\ 9{,}6[$$

Assim, $9{,}3$ é um valor aproximado por defeito de $3\sqrt{10}$, com erro inferior a $0{,}3$.

$$9{,}3\in\,]3\sqrt{10}-0{,}3\,;\ 3\sqrt{10}+0{,}3[$$

$9{,}6$ é um valor aproximado por excesso de $3\sqrt{10}$, com erro inferior a $0{,}3$.

Pois, $9{,}6\in\,]3\sqrt{10}-0{,}3\,;\ 3\sqrt{10}+0{,}3[$.

Exercícios

17 **O comprimento do lado de um quadrado é $\sqrt{7}$ cm.**
Sabendo que $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$, determina:

17.1. O valor aproximado, por excesso, do perímetro do quadrado e indica o erro cometido.

17.2. O valor aproximado, por defeito, da área do quadrado e indica o erro cometido.

18 **Sabendo que $24{,}2 < x < 24{,}3$, justifica que $7{,}29$ é um valor aproximado por excesso de $\frac{3x}{10}$, com erro inferior a $0{,}03$.**

19 **A família da Rita está a enfeitar a sua rua para a Festa de Nho São Filipe.**
A Rita determinou o valor aproximado por defeito, com erro inferior a $0{,}4$, do comprimento de corda de que precisam. O valor obtido pela Rita foi $78{,}3$ metros.
Indica, justificando, o comprimento mínimo de corda que a Rita deve comprar, de modo que tenham corda suficiente.

20 **Sabendo que $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ e que $3{,}3 < \sqrt{11} < 3{,}4$, calcula:**

20.1. Valores aproximados de $\sqrt{5}$, indicando o respetivo erro.

20.2. Valores aproximados de $\sqrt{55}$, indicando o respetivo erro.

20.3. Valores aproximados de $\sqrt{5} + \sqrt{11}$, indicando o respetivo erro.

21 **O lado de um triângulo equilátero tem de comprimento $\sqrt{15}$ cm.**
Sabendo que $3{,}8 < \sqrt{15} < 3{,}9$, determina um valor aproximado por excesso do perímetro do triângulo, indicando o respetivo erro.

22 **Determina o valor aproximado de $\sqrt{12}$ por excesso, com duas casas decimais.**

23 **Sabendo que $4{,}2 < \sqrt{18} < 4{,}3$, calcula:**

23.1. Um valor aproximado por defeito de $\sqrt{18} - 6$.

23.2. Um valor aproximado por excesso de $6 \times \sqrt{18}$.

Para aplicar

1 Considera os números reais $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{6}$.

1.1. Justifica que $\frac{3}{5} < \frac{7}{6}$.

1.2. Sem efetuar cálculos, completa com os símbolos $<$ ou $>$, de modo a obteres afirmações verdadeiras.

a) $\frac{3}{5} + \sqrt{7}$ .... $\frac{7}{6} + \sqrt{7}$

b) $-\frac{3}{5} + \sqrt{7}$ .... $-\frac{7}{6} + \sqrt{7}$

c) $\frac{3}{5} - \pi$ .... $\frac{7}{6} - \pi$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ .... $\left(\frac{7}{6}\right)^2$

2 Sabendo que $a < b < c$, com a, b e c números reais positivos, ordena os seguintes números:

$$b^2;\ -a;\ -c;\ -c^2;\ -\sqrt{a};\ c^3;\ \sqrt{b}$$

3 Sabendo que $a < b$, com $a > 0$ e $b > 0$, completa com os símbolos $\in$ e $\notin$.

3.1. a .... $[a;\ b[$

3.2. b .... $[a;\ b[$

3.3. $-a$ .... $[-b;\ b[$

3.4. $-b$ .... $[-a;\ a[$

3.5. a .... $]-\infty;\ -b]$

3.6. $-a$ .... $]-\infty;\ -b]$

4 Considera os intervalos: $A =]-\infty;\ +3]$ e $B = [-1;\ 4[$.

4.1. Representa na forma de uma condição, cada um dos intervalos A e B.

4.2. Representa os intervalos numa reta real.

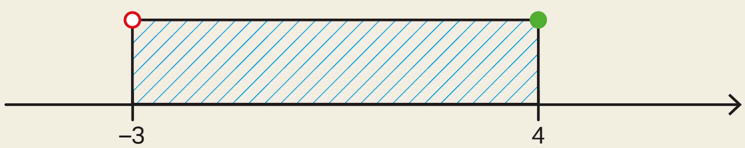
4.3. Determina $A \cap B$ e $A \cup B$.

4.4. Indica todos os números inteiros que pertencem a $A \cap B$.

4.5. Indica dois números irracionais que pertençam ao intervalo B.

5 Indica o maior número inteiro que pertence ao intervalo $[-4\pi;\ -\sqrt{2}[$.

6 Na figura, está representado na reta numérica um intervalo de números reais.



Indica o menor número inteiro e o maior número inteiro que pertencem ao intervalo representado.

7 **Os catetos de um triângulo retângulo medem 3 cm e $\sqrt{8}\text{ cm}$.**

7.1. Qual dos seguintes valores corresponde a um valor aproximado, por excesso, da medida da hipotenusa?

a) 4,11 cm **b)** 4,12 cm **c)** 4,13 cm **d)** 4,14 cm

7.2. Qual dos seguintes valores corresponde a um valor arredondado da medida da hipotenusa?

a) 4,11 cm **b)** 4,12 cm **c)** 4,13 cm **d)** 4,14 cm

8 **Completa a tabela seguinte:**

Valor exato	Valor aproximado às décimas por:		Arredondamento
	defeito	excesso	
$\sqrt{112}$			
$\frac{78}{19}$			
$\sqrt{87}$			
$\sqrt{\ldots\ldots}$	7,8		7,9

9 **Enquadra $\sqrt[3]{29}$, com erro inferior a $0{,}01$.**

10 **Enquadra o valor do perímetro de um triângulo equilátero, sabendo que a medida x do lado do triângulo é tal que $5{,}17 < x < 5{,}18$.**

11 **Sendo $5{,}2$ um valor aproximado de x, por defeito, com um erro inferior a $0{,}1$, indica se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando as falsas.**

a) $\sqrt{28}$ é um possível valor de x.

b) $5{,}4$ é um possível valor aproximado de x, por excesso, com erro inferior a $0{,}1$.

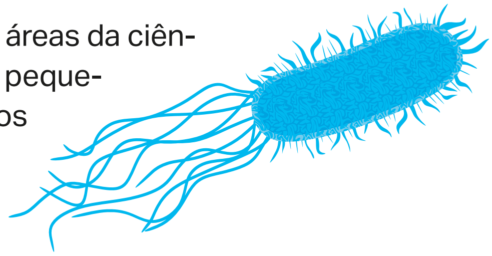
c) $\frac{31}{6}$ é um possível valor de x.

d) $5{,}2 \in \left]x-0{,}1\,;\,x+0{,}1\right[$.

1.4. Notação científica

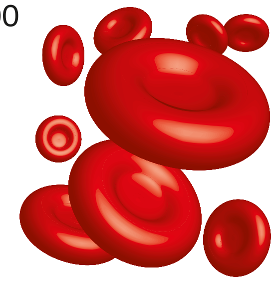
1.4.1. Números em notação científica

Em diversas situações, em particular em muitas áreas da ciência, utilizam-se com frequência números muito pequenos e números muito grandes, como podemos ver nos exemplos seguintes.



Uma bactéria possui um tamanho equivalente a $0{,}0000012$ metros.

Estima-se que a população mundial chegou às $8\,000\,000\,000$ pessoas, em novembro de 2022.



As Nações Unidas estimam que a população humana chegue até $112\,000\,000\,00$ pessoas, em 2100.

A distância da Terra à Lua é, aproximadamente, $384\,042\,000$ metros.

Um *googol* é $1\underbrace{000\,000\,000\ldots000\,000\,000}_{\text{100 zeros}}$, ou seja, 10^{100}.

O diâmetro de um glóbulo vermelho de um ser humano é $0{,}0000075$ metros.

Muitas vezes, a escrita destes números na notação habitual é pouco prática e de difícil leitura. Para ultrapassar esta complexidade, é comum utilizar-se a **notação científica** quando queremos exprimir números muito grandes ou números muito pequenos.

Representamos um número em **notação científica** através do produto de dois fatores, em que:

- O primeiro fator é um número maior ou igual a 1 e menor do que 10;
- O segundo fator é uma potência de base 10, com expoente inteiro.

Assim, um número está escrito em **notação científica** se está na forma:

$$a \times 10^n, \text{ com } 1 \leqslant a < 10 \text{ e } n \in \mathbb{Z}$$

Exemplos de números escritos em notação científica:

- $450\,000\,000\,000 = 4{,}5 \times 10^{11}$
- $32\,700\,000 = 3{,}27 \times 10^{7}$
- $0{,}0003 = 3 \times 10^{-4}$
- $\dfrac{98}{1\,000\,000\,000} = 0{,}000\,000\,098 = 9{,}8 \times 10^{-8}$

Exercício

24 **Para cada uma das situações seguintes, escreve os números em notação científica:**

24.1. O planeta Terra tem, aproximadamente, $4{,}54$ mil milhões de anos.

24.2. Em 2021, a população de Cabo Verde era de $483\,628$ habitantes.

24.3. A massa de um grão de sal é, aproximadamente, $0{,}00000002$ kg.

24.4. A área ocupada pela superfície do continente africano é cerca de $30\,370\,000$ km^2.

24.5. A Terra possui, aproximadamente, o total de $1\,358\,000\,000$ km^3 de água.

1.4.2. Comparação de números em notação científica

A notação científica é útil para comparar números muito grandes ou muito pequenos.

Para comparar dois números escritos em notação científica, começamos por comparar os expoentes das potências de base 10:

- Se os expoentes são diferentes, é maior o número cuja potência de 10 tem maior expoente.

$$2{,}35 \times 10^7 > 8{,}1 \times 10^5 \text{, porque } 7 > 5\text{.}$$

- Se os expoentes são iguais, comparamos os números que estão a multiplicar pela potência de base 10. O maior corresponde ao maior número.

$$4{,}3 \times 10^5 < 6{,}1 \times 10^5 \text{, porque } 6{,}1 > 4{,}3\text{.}$$

Exercício

25 **Escreve os seguintes números em notação científica e coloca-os por ordem decrescente.**

$0{,}0004$; $0{,}0041$; 41×10^2 ; $0{,}000039$; $41\,000\,000$; 41×10^{-2}; $3{,}9$

26 **Escreve os seguintes números em notação habitual.**

26.1. $3{,}4 \times 10^{-8}$

26.2. $-1{,}1 \times 10^7$

26.3. $9{,}9 \times 10^0$

26.4. $7{,}81 \times 10^{-4}$

1.4.3. Operar números em notação científica

Adição e subtração

Em 2021, os Estados Unidos da América tinham cerca de $3{,}3 \times 10^8$ habitantes e a China cerca de $1{,}412 \times 10^9$ habitantes. Qual era o número total de habitantes dos dois países juntos, em 2021?

Exemplo:

$$3{,}3 \times 10^8 + 1{,}412 \times 10^9 =$$
$$3{,}3 \times 10^8 + 1{,}412 \times 10 \times 10^8 =$$
$$3{,}3 \times 10^8 + 14{,}12 \times 10^8 =$$
$$(3{,}3 + 14{,}12) \times 10^8 =$$
$$17{,}42 \times 10^8 =$$
$$1{,}742 \times 10^9$$

Os Estados Unidos e a China tinham juntos, em 2021, cerca de $1{,}742 \times 10^9$ habitantes.

Multiplicação e divisão

Para multiplicarmos ou dividirmos números escritos em notação científica, multiplicamos ou dividimos os números e as potências correspondentes e, depois, colocamos o resultado em notação científica.

Exemplos:

- $$(3{,}4 \times 10^8) \times (4 \times 10^3) =$$
  $$(3{,}4 \times 4) \times (10^8 \times 10^3) =$$
  $$13{,}6 \times 10^{11} =$$
  $$1{,}36 \times 10^{12}$$
- $$(3{,}4 \times 10^8) : (4 \times 10^3) =$$
  $$(3{,}4 : 4) \times (10^8 : 10^3) =$$
  $$0{,}85 \times 10^5 =$$
  $$8{,}5 \times 10^4$$

Exercício

27 Calcula, apresentando o resultado em notação científica.

27.1. $8 \times 10^3 + 7 \times 10^3$

27.2. $5{,}2 \times 10^3 - 7 \times 10^2$

27.3. $3{,}07 \times 10^{-1} \times 6{,}1 \times 10^3$

27.4. $3{,}6 \times 10^2 : 2 \times 10^{-3}$

27.5. $9{,}9 \times 10^3 + 2{,}45 \times 10^{-2} \times 6{,}8 \times 10^4$

Para aplicar

1 Escreve os seguintes números em notação científica.

1.1. 68 000 000

1.2. 68 030 000

1.3. 60 800 000

1.4. 0,000000086

1.5. 0,00003086

1.6. 0, 00000806

2 Considerando que a distância média do planeta Mercúrio ao Sol é de 57 910 000 km , apresenta a distância em metros e escritos em notação científica.

3 As formigas possuem um comprimento médio de 0,01 metros. Se tivermos uma fila com 341 formigas, qual é o comprimento da fila?

Apresenta o resultado em notação científica.

4 Determina, em notação científica, o número de segundos de um mês com 31 dias.

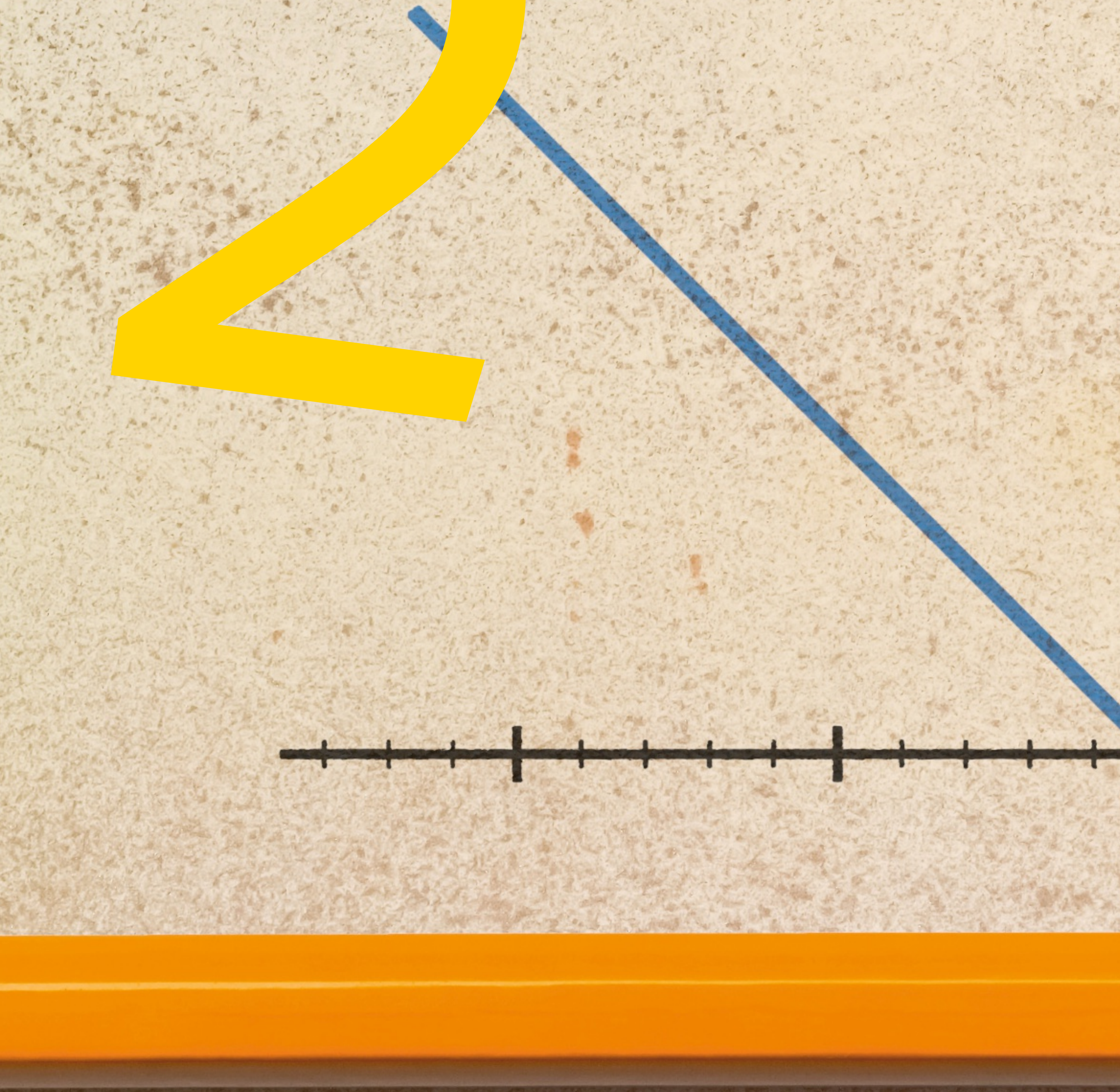
5 A espessura de um cabelo humano é 7×10^{-5} metros. Se uma pessoa possui 100 mil fios de cabelo e se colocássemos fio de cabelo sobre fio de cabelo, qual seria o comprimento obtido?

Apresenta o resultado em notação científica.

6 Uma pesquisa realizada por uma agência científica australiana estimativa que existem cerca de 14 milhões de toneladas de plástico acumulado no fundo dos oceanos. Se no Oceano Atlântico estiver acumulado uma quinta parte desse plástico, qual é o respetivo valor?

Apresenta o resultado em quilogramas e em notação científica.

2



Funções, sequências e sucessões I

2.1. Gráficos de funções afins

2 Funções, sequências e sucessões I

Manual Digital

Vídeo
Funções lineares e afins

Exercício
Reconhecer funções lineares e afins

O estudo de funções é um dos conteúdos mais relevantes na aprendizagem da Matemática, uma vez que situações concretas da realidade podem, muitas vezes, ser modeladas por funções. Seguramente, as funções irão surgir nas diversas disciplinas do teu percurso no ensino secundário.

Para uma boa aprendizagem das funções é importante conhecer, compreender e articular as suas diferentes formas de representação: gráfica, algébrica e numérica.

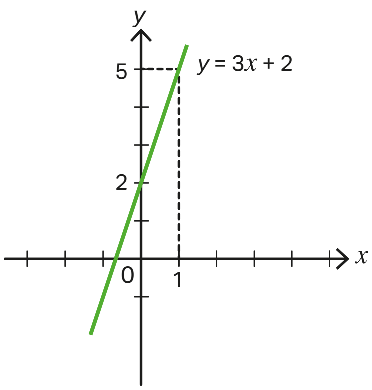
Nesta unidade será possível explorares estas três formas de representação das funções afins.

2.1. Gráficos de funções afins

2.1.1 Função afim

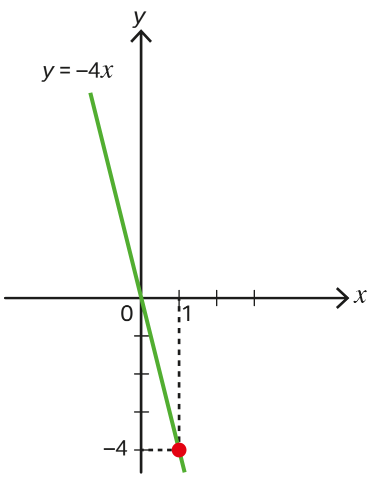
Exemplos:

Considera a função f definida por $f(x) = 3x + 2$, cujo gráfico está representado na imagem.



A reta que corresponde à representação gráfica da função f é dada por $y = 3x + 2$, em que 3 é a inclinação da reta e 2 é a ordenada na origem.

Considera a função h definida por $h(x) = -4x$.

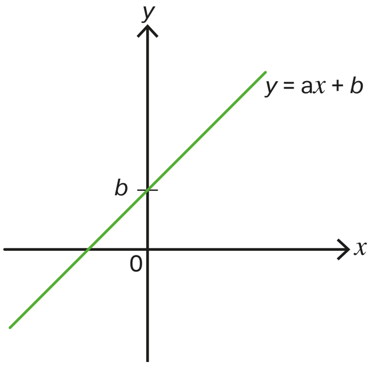


A reta que corresponde à representação gráfica da função h é dada por $y = -4x$, em que -4 é a inclinação da reta e 0 é a ordenada na origem.

Uma função afim é definida por uma expressão algébrica do tipo $f(x) = ax + b$, com a e b constantes, em que x é uma variável independente.

A representação gráfica de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta $y = ax + b$, tal que:

- a corresponde ao declive da reta.
- b corresponde à ordenada na origem, porque $f(0) = b$.



Nota
Quando a ordenada na origem é 0 $(b = 0)$, a função diz-se linear.
Neste caso, a reta passa na origem do referencial.

Manual Digital
Exercício
Identificar gráficos de funções lineares
Vídeo
Gráfico de funções afins

Exercícios

1 **Considera a função g definida por $g(x) = -4x - 4$.**

1.1. Indica o declive da reta $y = g(x)$.

1.2. Indica a ordenada na origem da reta $y = g(x)$.

2 **Considera as funções f e g definidas por: $f(x) = x + 1$ e $g(x) = -x$.**

2.1. Para cada uma das funções, indica o declive das retas que as representam.

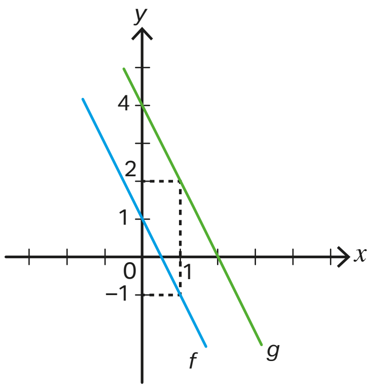
2.2. Para cada uma das funções, indica a ordenada na origem das retas que as representam.

2.1.2. Relação entre declive e paralelismo

Exemplo:

Considera as funções f e g definidas por $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = -2x + 4$.

A imagem ao lado, apresenta, no mesmo referencial cartesiano os gráficos de f e g. Repara que as retas que representam os gráficos de f e g tem o mesmo declive $a = -2$. Repara ainda que elas são retas paralelas.



Retas que têm o mesmo declive são paralelas.

Manual Digital

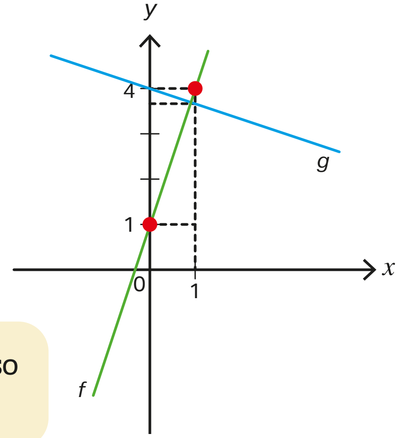
Exercício
Determinar o declive de retas não verticais

2.1.3. Relação entre declive e perpendicularidade

Exemplo:

Considera as funções f e g definidas por $f(x)=3x+1$ e $g(x)=-\frac{1}{3}x+4$.

As funções f e g são representadas por retas perpendiculares, uma vez que $-\frac{1}{3}$ é o simétrico do inverso de 3.



Se o declive de uma reta for igual ao simétrico do inverso do declive de outra reta, as retas são perpendiculares.

Exercícios

3 Considera as funções definidas por:

$f(x)=2x+1$; $g(x)=-3x$; $h(x)=3x-8$; $i(x)=-3x+7$; $j(x)=\frac{1}{3}x-8$

3.1. Indica duas funções cujos gráficos correspondentes sejam retas paralelas.

3.2. Indica duas funções cujos gráficos correspondentes sejam retas perpendiculares.

3.3. Indica as funções cujas retas que as representam têm declive positivo.

3.4. Indica duas funções com a mesma ordenada na origem.

4 Indica, justificando, o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações.

4.1. Os gráficos das funções f e g definidas por $f(x)=x+1$ e $g(x)=-x$ são representadas por retas perpendiculares.

4.2. Os gráficos das funções f e g definidas por $f(x)=2x+3$ e $g(x)=4x+3$ são representadas por retas paralelas.

4.3. O gráfico da função f definida por $f(x)=-7x$ é uma reta que não passa na origem.

5 Considera as seguintes funções:

$$f(x)=-\frac{1}{4}x;\quad g(x)=-4x+3;\quad h(x)=4x-1$$

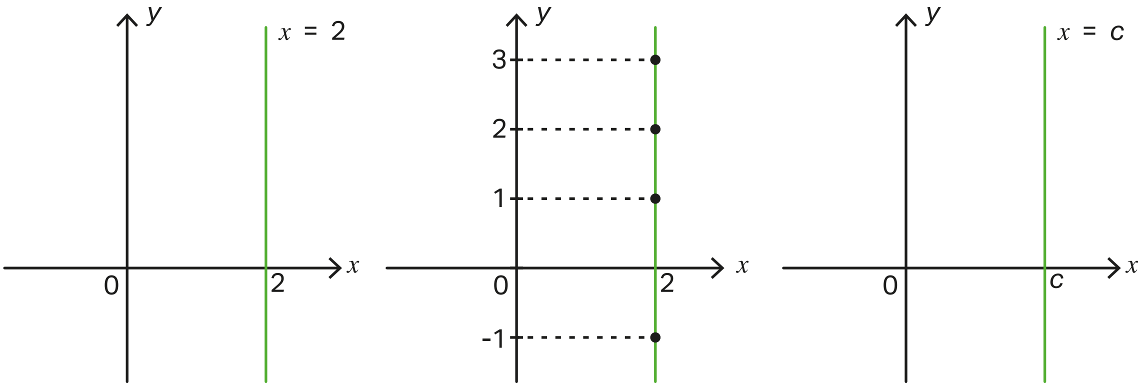
5.1. Representa graficamente as funções no mesmo referencial.

5.2. Indica, justificando, se algumas das representações gráficas são paralelas ou perpendiculares.

2.1.4. Equação da reta vertical

Considere a reta $x = 2$, representada na imagem seguinte. Indica sobre a reta $x = 2$, os pontos $(2\,;3)$, $(2\,;2)$, $(2\,;0)$ e $(2\,;\,-1)$.

Repara que todos os pontos desta reta têm a mesma abcissa, $x = 2$.



a) b) c)

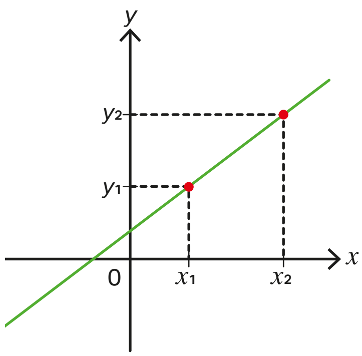
Se dois pontos distintos $(x_1\,,\ y_1)$ e $(x_2\,,\ y_2)$ são pontos de uma reta r e $x_1 = x_2 = c$, a reta r é uma reta vertical.

Neste caso, a equação da reta vertical é $\boldsymbol{x = c}$, sendo $\boldsymbol{c}$ a abcissa de todos os pontos da reta.

2.1.5. Determinação do declive de uma reta

Se dois pontos distintos $(x_1\,,\ y_1)$ e $(x_2\,,\ y_2)$ são pontos de uma reta não vertical r, então podemos obter o seu declive $\boldsymbol{a}$ usando a expressão:

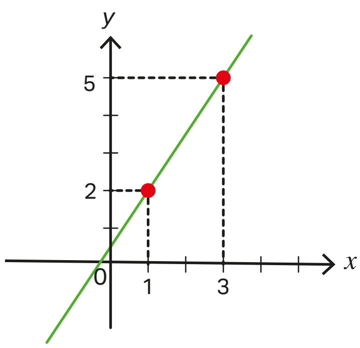
$$\boldsymbol{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}\,.$$



Exemplo:

Sendo $(1\,,\ 2)$ e $(3\,,\ 5)$ dois pontos de uma reta, então o declive da reta é:

$$a = \frac{5-2}{3-1} = \frac{3}{2}$$



Manual Digital

Vídeo
Equações de retas

Exercícios

6 Determina o declive da reta r que contém os pontos $(4\,,\ 2)$ e $(10\,,\ 1)$.

7 Indica a equação da reta s que contém o ponto $(4\,,\ 2)$ e cuja ordenada na origem é 3.

8 Indica a equação da reta t que contém os pontos $(3\,,\ 2)$ e $(3\,,\ 0)$.

9 Considera as funções g, h e i definidas por

$$g(x)=x\,,\ h(x)=x+1 \text{ e } i(x)=x+4\,.$$

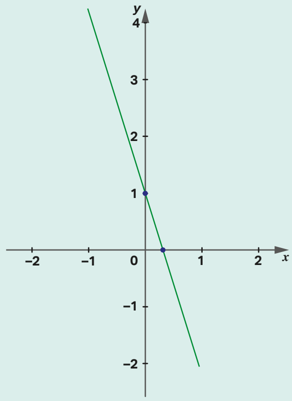
9.1. Representa as funções num mesmo referencial.

9.2. Qual é o declive das retas que representam as funções? O que têm em comum as retas?

9.3. É possível obter as retas definidas por $y=x+1$ e $y=x+4$, por translação, a partir da reta $y=x$? Explica o teu raciocínio.

10 A reta representada no referencial contém os pontos de coordenadas $\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$ e $(0;\ 1)$.

Indica a equação da reta.



2.1.6. Problemas envolvendo equações de retas

As funções afins e as suas representações gráficas apoiam na resolução de diversos problemas.

Problema 1

A diferença entre o quádruplo de um número e o dobro de outro é igual a oito. Quais serão os pares de números que satisfazem esta condição?

Resolução:

Para resolvermos este problema, vamos escrever a equação que traduz o problema.

Sendo x e y os dois números referidos: $4x-2y=8$.

Para podermos representar graficamente a reta que contém os pares de números que satisfazem a condição, resolvemos a equação em ordem a y.

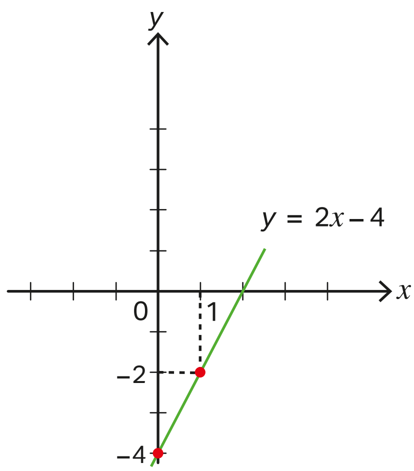
$4x - 2y = 8 \Leftrightarrow -2y = -4x + 8 \Leftrightarrow y = \frac{-4x+8}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 2x - 4$

A reta r contém todos os pares ordenados que satisfazem a condição:

"A diferença entre o quádruplo de um número e o dobro de outro é igual a oito."

Algumas soluções: $(1, -2)$; $(0, -4)$; $(2, 0)$; $(3, 2)$.



Manual Digital

Exercícios

Comparar o declive de retas paralelas

Determinar expressões de retas paralelas

Determinar a equação de retas paralelas

Problema 2

Num dia de muito calor, a Rita colocou um copo cheio de água ao sol. A Rita queria verificar quanto tempo a água demorava a evaporar.

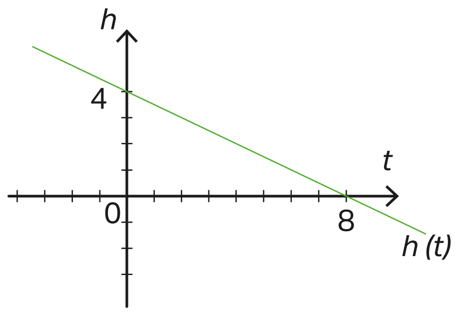
Ao efetuar diversas observações, a Rita concluiu que a altura da água no copo (h), em centímetros, em função do tempo (t), em horas, é dada pela função:

$$h(t) = -\frac{1}{2}t + 4$$

Qual era a altura inicial da água? E quanto tempo demorou a água a evaporar?

Resolução:

Para apoiar a resolução deste problema, vamos representar, num referencial cartesiano, a reta que relaciona a altura da água com o tempo.



- A altura inicial da água corresponde à altura quando $t = 0$, ou seja, a ordenada na origem.

$$h(0) = -\frac{1}{2} \times 0 + 4 = 4 \text{ cm}$$

- O tempo que a água demorou a evaporar corresponde, graficamente, ao momento em que a altura foi zero.

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 8 \text{ horas}$$

Para aplicar

1 **As retas t e u têm como equações, respetivamente, $y = 5x + 1$ e $y = -2x - 3$.**

1.1. As retas t e u são paralelas? Justifica a tua resposta.

1.2. Indica as ordenadas na origem das duas retas.

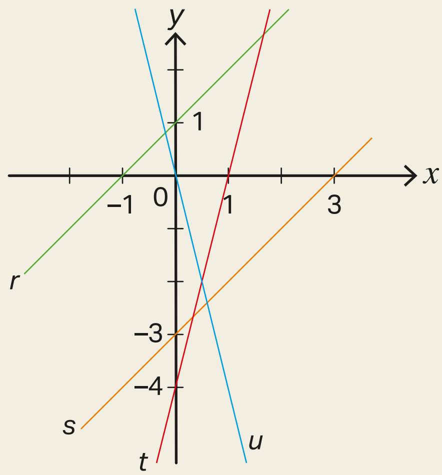
2 **A função afim f é definida por $f(x) = 2x - 1$.**

2.1. Determina $f(0)$ e $f(3)$.

2.2. Representa graficamente a função.

2.3. Dá um exemplo de uma função cuja representação gráfica seja perpendicular à função f.

3 **Observa com atenção as retas r, s, t e u representadas no seguinte referencial cartesiano.**



3.1. Faz corresponder as retas representadas no referencial com as seguintes funções:

$f(x) = x + 1$

$g(x) = -4x$

$h(x) = x - 3$

$i(x) = 4x - 4$

3.2. Indica as retas que têm declive positivo.

3.3. Indica as retas que têm declive negativo.

3.4. As retas com declive negativo correspondem a funções crescentes ou decrescentes? Justifica.

4 **Para cada uma das seguintes situações, determina a equação da reta que passa pelos pontos $R(x_1, y_1)$ e $T(x_2, y_2)$.**

4.1. $R(0, 2)$ e $T(1, 5)$.

4.2. $R(-2, 1)$ e $T(4, 8)$.

4.3. $R(1, 5)$ e $T(-3, 5)$.

5 **A tia do Miguel vai cozinhar cachupa. Como não tinha feijão em casa, pediu ao Miguel para ir ao mercado comprar. No mercado, cada quilograma de feijão custa 200 escudos. Quando os clientes não levam saco, podem comprar um por 10 escudos.**

5.1. Escreve uma expressão algébrica que defina o custo do feijão, em função da massa.

5.2. Escreve uma expressão algébrica que defina o custo do feijão, em função da massa, quando um cliente compra um saco.

5.3. Se o Miguel comprar 3,5 kg de feijão, quanto vai pagar, se não precisar de comprar saco?

5.4. Sabendo que o Miguel levou 510 escudos e que precisa de comprar um saco, qual é a quantidade máxima de feijão que pode comprar?

5.5. As retas que representam graficamente as situações de **5.1.** e **5.2.** são paralelas? Justifica.

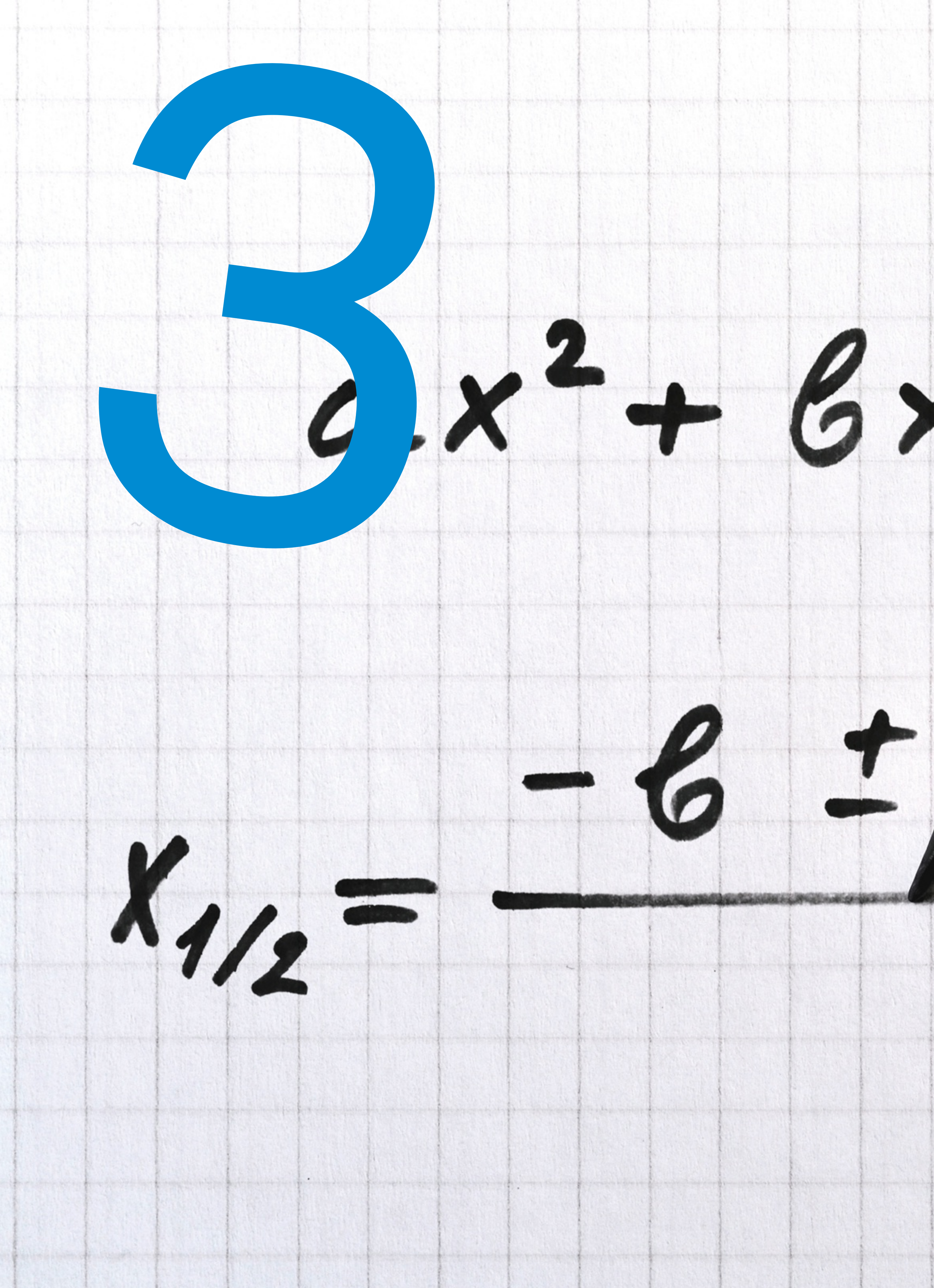
6 **Considera a função g definida pela expressão $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.**

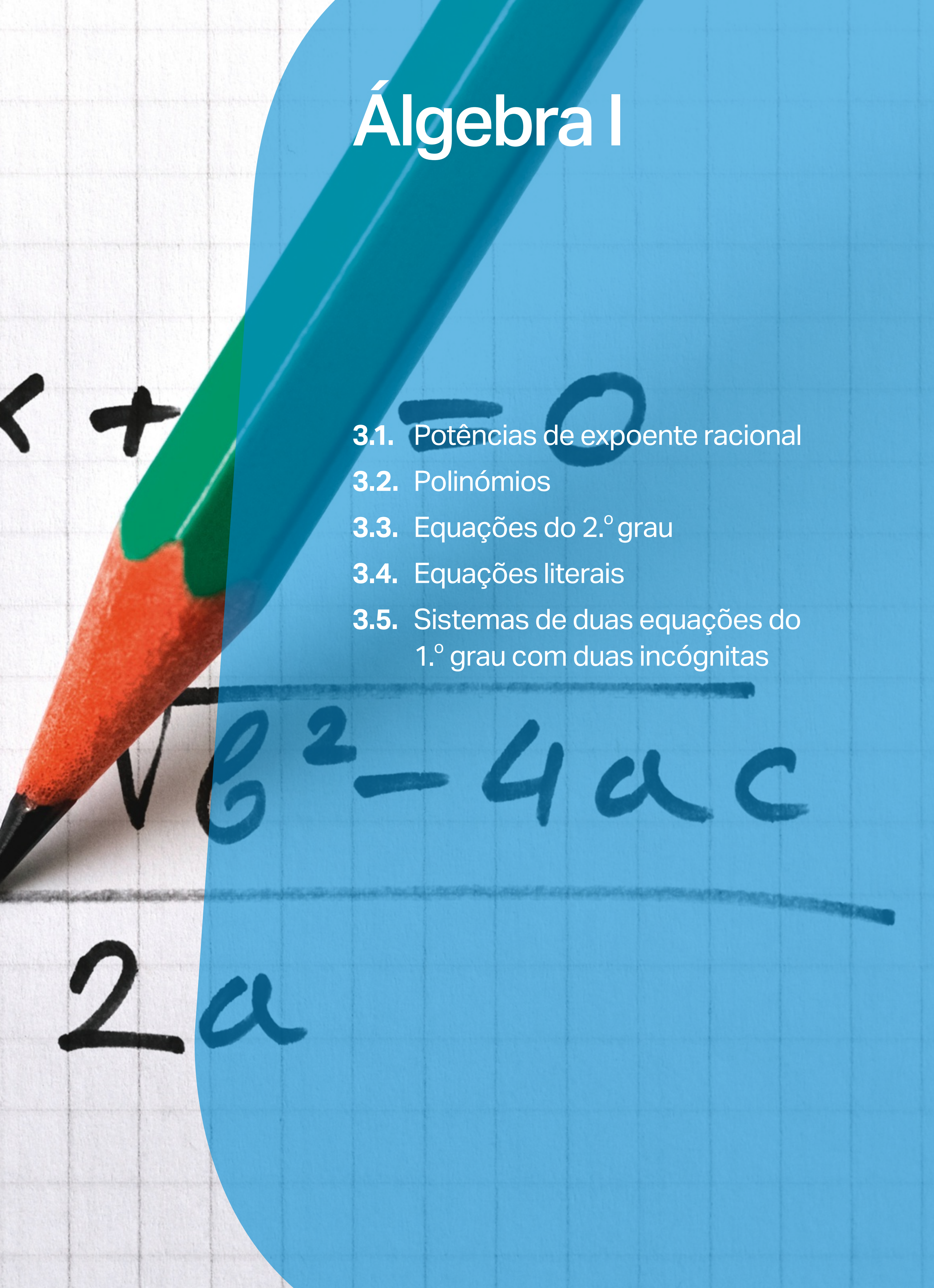
6.1. Determina o valor de $g(0)$; $g(1)$; $g(-1)$ e $g(2)$.

6.2. Representa graficamente a função g.

6.3. Verifica que o ponto $(3; -1)$ pertence ao gráfico de g.

3





Álgebra I

3.1. Potências de expoente racional

3.2. Polinómios

3.3. Equações do 2.º grau

3.4. Equações literais

3.5. Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas

3 Álgebra I

Manual Digital

Vídeo
Potências de base inteira e expoente natural

Interatividade
Propriedades das potências

Neste tema encontramos vários subtemas. As potências de expoente racional surgem no seguimento das potências estudadas nos anos anteriores e possuem inúmeras aplicações no cotidiano, como nos cálculos envolvendo juros compostos, em funções exponenciais e também, como já abordamos, na notação científica para representar números muito grandes ou pequenos. Também são estudadas as equações do 2.° grau e os sistemas de equações do 1.° grau, fundamentais à resolução de problemas com uma ou duas variáveis.

Potência de expoente natural

Recorda:

- $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$
- $\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$
- $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$
- $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

Sendo $a \in \mathbb{R}$ e n um número natural:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ vezes}} \text{ é o produto de } n \text{ fatores iguais a } a.$$

Exercício

1 Calcula.

a) 7^2 **b)** $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ **c)** $(-7)^2$ **d)** 10^1 **e)** 2^4 **f)** -2^4 **g)** $(-2)^5$ **h)** $(0{,}5)^3$

Regras de operações com potências

Sendo a e b números reais não nulos e m e n números naturais:

Produto de potências com a mesma base

O produto de potências com a mesma base é igual a uma potência com a mesma base e com expoente igual à soma dos expoentes.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Produto de potências com o mesmo expoente

O produto de potências com o mesmo expoente é igual a uma potência com o mesmo expoente e com base igual ao produto das bases.

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

Quociente de potências com a mesma base

O quociente de potências com a mesma base é igual a uma potência com a mesma base e com expoente igual à diferença dos expoentes.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Recorda
Para adicionarmos ou subtrairmos potências não existem regras que facilitem os cálculos.

Quociente de potências com o mesmo expoente

O quociente de potências com o mesmo expoente é igual a uma potência com o mesmo expoente e com base igual ao quociente das bases.

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

Potência de potência

Ao calcular a potência de uma potência, podemos conservar a base e multiplicar os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Exercício

2 Calcula, utilizando, sempre que possível, as regras de operações com potências.

2.1. $3^2 \times 3^3$ **2.2.** $3^2 + 3^3$ **2.3.** $4^2 \times 5^2$ **2.4.** $4^2 \times 5^2$

2.5. $\frac{\pi^4}{\pi^3}$ **2.6.** $\frac{12^3}{6^3}$ **2.7.** $(\sqrt{2})^4$ **2.8.** $\frac{(7^3)^4}{7^{10}}$

3.1. Potências de expoente racional

As potências de expoente inteiro e de expoente racional são uma extensão das potências, já conhecidas, de expoente natural. As regras operatórias das potências de expoente natural mantêm-se para potências de expoente inteiro ou expoente racional.

3.1.1. Potência de expoente nulo

Para que as regras operatórias de potências se mantenham, $a^0 = 1$, com $a \neq 0$.

Verifica que:

- Sendo a um número real, em que $a \neq 0$.
  Pela regra operatória do produto de potências, sabemos que: $a^{m+n} = a^m \times a^n$.
  Supondo que $n = 0$, temos: $a^m = a^{m+0} = a^m \times a^0 \implies a^0 = 1$.
- Sendo a um número real, em que $a \neq 0$.
  Pela regra operatória do quociente de potências, sabemos que:
  $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ e } \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$
  Supondo que $m = n$ e $b = a$ temos: $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$ e $\frac{a^m}{a^m} = \left(\frac{a}{a}\right)^m = 1^m = 1$

Exemplos:

- $2593^0 = 1$
- $\left(-\frac{2}{5}\right)^0 = 1$
- $\left(\frac{4}{101}\right)^0 = 134^0 = 1$
- $\left[\left(\sqrt{2}\right)^3\right]^0 = 1$

Assim, uma potência de base diferente de zero e expoente nulo é igual a 1.
$a^0 = 1$, com $a \neq 0$.

Exercícios

3 Calcula.

3.1. 5^0 **3.2.** π^0 **3.3.** $(-5)^0$ **3.4.** -5^0 **3.5.** $-(5)^0$

3.6. 5674^0 **3.7.** $(-1)^0$ **3.8.** $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ **3.9.** $\left(-\frac{9}{7}\right)^0$ **3.10.** $\left(\sqrt{2^3}\right)^0$

4 Calcula.

4.1. $5^0 + 341^0 + \left(\frac{0,5}{45}\right)^0$ **4.2.** $-7^0 + 98^0$ **4.3.** $5^0 \times 0,14^0 - \left(\frac{1}{4}\right)^0$

4.4. $-36^0 - 18^0 - 9^0$ **4.5.** $-\frac{5^0}{5} - \frac{3^0}{5}$ **4.6.** $\left(-\frac{5}{2}\right)^0 + 4^0 - 4^0$

3.1.2. Potência de expoente inteiro negativo

Para que as regras operatórias da multiplicação de potências se mantenham, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, com $a \neq 0$ e n número natural.

Verifica que:

Para que a regra da multiplicação de potências com a mesma base se mantenha, tem de se manter: $a^{-n} \times a^n = a^{-n+n}$.

Contudo, $a^{-n+n}=a^0=1$. Então, a^{-n} tem de representar o inverso de a^n.

Logo, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, quando $a\neq 0$ e n um número natural.

Como $1^n=1$, podemos também escrever $\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Exemplos:

- $2^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$
- $6^{-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{1}{6}$
- $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25}$

Manual Digital

Vídeo
Potências de expoente inteiro não positivo

Assim, uma potência de base diferente de zero e expoente inteiro negativo é igual a uma potência de base inversa e expoente simétrico.

$$\boldsymbol{a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n}$$

Exercícios

5 Calcula.

5.1. 5^{-1} **5.2.** $(-5)^{-1}$ **5.3.** -5^{-1} **5.4.** -5^{-2}

5.5. $(-5)^{-2}$ **5.6.** 4^{-3} **5.7.** $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}$ **5.8.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

5.9. $\left(-\frac{9}{7}\right)^{-2}$ **5.10.** $\frac{2^{-4}}{5}$

6 Calcula.

6.1. $3^{-2}+4^0$ **6.2.** $-2^{-5}+2^{-5}$ **6.3.** $4^{-2}+2^{-4}$

6.4. $-10^{-2}-\frac{100^0}{100}+\frac{2}{100}$ **6.5.** $\left(\frac{7}{4}\right)^{-2}+49^{-1}$ **6.6.** $\left(\frac{1}{8}\right)^{-4}+\left(\frac{3}{9}\right)^{-4}$

7 Calcula, utilizando as regras operatórias das potências.

7.1. $5^2\times 5^{-3}$ **7.2.** $(3^3)^3:\left(\frac{1}{3}\right)^9$ **7.3.** $(2^{-2})^{-2}\times 2^{-4}$

7.4. $\dfrac{\left(\frac{5}{12}\right)^5\times\left(\frac{5}{12}\right)^{12}}{\left(\frac{5}{12}\right)^{15}}$ **7.5.** $\left(\frac{4}{10}\right)^3\times 0{,}4^{-4}:7^{-1}$ **7.6.** $\dfrac{7^{-2}\times 0{,}07^{-2}}{0{,}49}$

8 Calcula, utilizando, sempre que possível, as regras operatórias das potências.

8.1. $\dfrac{\left(\frac{7}{6}\right)^5\times\left(\frac{6}{7}\right)^{-3}}{\left(\frac{7}{6}\right)^6}$ **8.2.** $\left(\frac{7}{4}\right)^{-2}\times(2^{-1})^2$ **8.3.** $\dfrac{\left(\frac{1}{8}\right)^{-4}\times 8^{-4}}{6^0}$

9 Apresenta $\dfrac{(-5)^{-2}\times\left(\frac{1}{5}\right)}{5^{-4}}$ sob a forma de uma potência de base 5. Aplica, sempre que possível, as regras operatórias das potências.

3.1.3. Potências de expoente racional

Repara que:

a) $4=2^2$ e $\sqrt{4}=2$, então $4^{?}=2$?

A resposta é $4^{\frac{1}{2}}=2$. Sendo assim, notamos que $\sqrt{4}=4^{\frac{1}{2}}$.

b) $\sqrt{9}=9^{\frac{1}{2}}=3$

Assim, $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$ e de um modo geral $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

Repara ainda que:

a) $5^{\frac{3}{2}}=5^{\frac{1}{2}\times 3}=\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3=\left(\sqrt{5}\right)^3=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\sqrt{5\times 5\times 5}=\sqrt{5^3}=\sqrt{125}$

b) $7^{\frac{3}{4}}=7^{\frac{1}{4}\times 3}=\left(7^{\frac{1}{4}}\right)^3=\left(\sqrt[4]{7}\right)^3=\sqrt[4]{7}\times\sqrt[4]{7}\times\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{7\times 7\times 7}=\sqrt[4]{7^3}=\sqrt[4]{343}$

Define-se potência de base não negativa de expoente $\frac{p}{q}$ como a raiz de índice q da potência de expoente p, em que p e q são números inteiros e $q>1$.

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}\text{, com } a\geqslant 0$$

Exercício

10 Escreve na forma de potência.

10.1. $\sqrt[5]{17^2}$ **10.2.** $\sqrt[3]{10^5}$ **10.3.** $\sqrt{4^3}$

10.4. $\sqrt[3]{5^2}$ **10.5.** $\sqrt[9]{8^3}$

Regras operatórias com potências de expoente racional

As regras operatórias das potências de expoente inteiro estendem-se às potências de expoente racional.

Produto de potências	Regra	Exemplos
com a mesma base	$a^m\times a^n=a^{m+n}$ $(a\in\mathbb{R}^+,\ m \text{ e } n\in\mathbb{Q})$	$4^{\frac{1}{2}}\times 4^5=4^{\frac{1}{2}+5}$
com o mesmo expoente	$a^m\times b^m=(a\times b)^m$ $(a \text{ e } b\in\mathbb{R}^+,\ m\in\mathbb{Q})$	$7^{0,1}\times 8^{0,1}=7\times 8^{0,1}$

Manual Digital

Exercícios
Calcular potências de expoente inteiro não positivo

Calcular o valor de expressões com potências

Nota que:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(3^{-1}\right)^{\frac{2}{5}} = 3^{-\frac{2}{5}}$

$\boxed{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(a^{-1}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{p}{q}}}$

Quociente de potências	Regra	Exemplos
com a mesma base	$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$ $(a \in \mathbb{R}^+ ,\ m \text{ e } n \in \mathbb{Q})$	$(2)^{\frac{3}{2}} : (2)^{\frac{5}{2}} = (2)^{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}$
com o mesmo expoente	$\boldsymbol{a^m : b^m = (a : b)^m}$ $(a \text{ e } b \in \mathbb{R}^+ ,\ m \in \mathbb{Q})$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}} : \left(\frac{6}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{5} : \frac{6}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

	Regra	Exemplo
Potência de potência	$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \times n}}$ $(a \in \mathbb{R}^+ ,\ m \text{ e } n \in \mathbb{Q})$	$\left(3^2\right)^{\frac{9}{4}} = 3^{2 \times \frac{9}{4}}$

Exercícios

11 Transforma as expressões numa potência de expoente racional positivo.

11.1. $5^{\frac{4}{3}} \times 5^{\frac{3}{4}}$

11.2. $3^{-\frac{7}{6}} \times 3^{\frac{9}{6}}$

11.3. $12^{0,25} \times 3^{\frac{1}{4}}$

11.4. $\dfrac{\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{7}{4}}}{\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{2}{4}}}$

11.5. $\left(\frac{4}{10}\right)^{3} \times 0{,}4^{1,5} : \left(\frac{4}{10}\right)^{-0,5}$

11.6. $\left(6^2\right)^{\frac{3}{2}}$

12 Aplicando as regras operatórias das potências, mostra que

$\dfrac{8^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5}{2^5} \times \dfrac{6^{\frac{3}{4}} \times 6^{\frac{5}{4}}}{18 \times \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0\right]}$ é igual a 1.

13 Escreve $\frac{1}{729}$ na forma de uma potência de base 3.

14 Determina o valor da seguinte expressão algébrica.

$$\frac{(-4)^2 + 2^{\frac{3}{2}} - 2^4}{(-1)^0 \times 2^{\frac{1}{2}}}$$

Para aplicar

1 Calcula o valor numérico das seguintes expressões.

1.1. $(-18)^0$ **1.2.** 2^{-5} **1.3.** $\left[\left(\frac{1}{17}\right)^{-1}\right]^0$

2 Completa os espaços, de modo a obteres afirmações verdadeiras.

2.1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^{\dots}$ **2.2.** $352^{\dots} = 1$ **2.3.** $\left(\frac{7}{2}\right)^{-8} = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^8$

2.4. $\frac{1}{100} = 10^{\dots}$ **2.5.** $\frac{9}{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\dots}$ **2.6.** $\frac{1}{81} = 3^{\dots}$

2.7. $36^0 \times \frac{1}{36} = 6^{\dots}$

3 Completa o seguinte quadro com potências de base 2, sabendo que o produto dos números em cada linha e em cada coluna é igual a 2.

2^1		
	2^0	2^4
	2^{-1}	

4 Apresenta a expressão sob a forma de uma potência de base 3.

$$27 : 9^{-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

5 Calcula, aplicando as regras operatórias das potências.

5.1. $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **5.2.** $\left(\frac{1}{10}\right)^{-5} : 10^3$

5.3. $(8^2)^{-4} \times (3^{-2})^4$ **5.4.** $(36^7)^3 : \left(\frac{1}{6}\right)^{-21} \times (6^4)^5$

5.5. $7^{\frac{6}{5}} \times 7^{\frac{4}{5}} : 0{,}7^2$

6 Apresenta a expressão sob a forma de uma potência de base $\frac{4}{3}$.

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times (3^4)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}}$$

3.2. Polinómios

Recorda

Monómio

Um **monómio** é uma expressão algébrica inteira composta por uma parte literal (variáveis) e um coeficiente numérico, ou seja, por letras e números.

Exemplo:

São monómios: 5 ; abc ; $3xy$

parte literal
Coeficiente ⟵ $3xy$

Dois **monómios** são **semelhantes** quando têm a mesma parte literal.

Dois **monómios** são **simétricos** quando são semelhantes e os seus coeficientes são simétricos. O **grau de um monómio** não nulo é obtido através da soma dos expoentes de todas as variáveis em que o coeficiente numérico deve ser diferente de zero, caso contrário o monómio será nulo.

Exercício

15 Completa a seguinte tabela:

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
$4x$	4	x	1
$-2y$			
$-\frac{5}{3}xy$			2
$4xy^2$			
$4\pi x$			
$-3x^4yz$			

Expressões algébricas com monómios

Para adicionar dois monómios semelhantes, adicionam-se os coeficientes e mantém-se a parte literal.

Exemplo: $5xy + 7xy = 12xy$

No produto de dois monómios, multiplicam-se os coeficientes e multiplicam-se as partes literais.

Exemplo: $5xy \times 7xy = 35x^2y^2$

Manual Digital
Vídeos
Monómios
Adição de monómios
Produto de monómios

Manual Digital

Vídeo
Polinómios

Polinómio

Um **polinómio** é uma soma algébrica de monómios (designados por termos do polinómio).

Exemplo:

Considera o polinómio $P(x, y) = 4y + 3x$:

- $4y$ e $3x$ são os termos do polinómio.
- 4 e 3 são os coeficientes do polinómio.
- y e x são as variáveis, ou indeterminadas, do polinómio.

Para se escrever um **polinómio na forma reduzida**, adicionam-se algebricamente os termos semelhantes do polinómio.

O **grau de um polinómio** na forma reduzida e não nulo corresponde ao grau do monómio de maior grau que nele figura.

Exemplo:

Considera o polinómio $P(x, y, z) = 4yx^2 + x + 2y^2xz^2 - 8$.

- O grau do monómio $4yx^2$ é 3.
- O grau do monómio x é 1.
- O grau do monómio $2y^2xz^2$ é 5.
- O grau do monómio -8 é 0.

O grau do polinómio é 5, que corresponde ao grau do monómio $2y^2xz^2$.

Um **termo independente** é um termo sem variáveis.

Por exemplo, o termo independente do polinómio é -8.

Exemplo:

Considera o polinómio $P(x, y) = 4y + 3x - 2y + 5 - x$.

Para escrevermos o polinómio na forma reduzida, temos de adicionar todos os termos semelhantes.

$$4y + 3x - 2y + 5 - x = (4y - 2y) + (3x - x) + 5 = 2y + 2x + 5$$

$$P(x, y) = 2y + 2x + 5 \text{ está na forma reduzida.}$$

Exercícios

16 Escreve, na forma reduzida, os seguintes polinómios e indica os respetivos graus.

16.1. $P(x, y) = 2x + 3x^2 - y^2 + 3y^2 - 7x$

16.2. $Q(x, y, z) = xy + x^2 + 2xy - 3x^2 + z^2$

17 **Considera os seguintes polinómios:**

$A(y, x, z) = yx^2 - 2z - 17 + 9yx^2 + 8$ $\quad$ $B(x, z, y) = 7x - 2zy - x + 2zy$

$C(y, x, z) = 11yx^2 - 4yx^2 - 8 + 4z$ $\quad$ $D(x) = -2x - 8 + 8x + 8$

$E(z, x, y) = -3zx - 4y + 2y + 3zx + y$

17.1. Apresenta os polinómios na forma reduzida, indica os respetivos graus e, caso exista, o termo independente.

17.2. Indica dois polinómios que admitam a mesma forma reduzida.

Exemplos:

- Considera os polinómios:

$$A(x, y) = 7x^2 - 2xy + 3xy \qquad B(x, y) = 10x^2 + xy - 3x^2$$

A e B são polinómios iguais, porque admitem a mesma forma reduzida: $7x^2 + xy$.

- Considera o polinómio:

$$C(x, y) = zx - 7y^2 + 3zx + 7y^2 - 4zx$$

C é um polinómio nulo, porque $C(x, y) = 0$ na forma reduzida.

Polinómios iguais são polinómios que admitem a mesma forma reduzida.
Um polinómio que na forma reduzida é igual a zero, diz-se um **polinómio nulo**.

Exemplos:

- $7y^2 + 3zx$ é um binómio.
- $y^2 + zx - 2$ é um trinómio.
- $8xz^2$ é um monómio.

Um **binómio** é um polinómio com dois termos.
Um **trinómio** é um polinómio com três termos.
Um **monómio** é um polinómio com um termo.

Exercícios

18 **Verifica se os polinómios G e H são iguais.**

$G(x) = \frac{21}{3}\pi + 25 \times \frac{x}{5} + x^6 - 7\pi + x$ $\quad$ $H(x) = 6x + 8x^2 + 6^2x^6 - \sqrt{64}x^2 - 35x^6$

19 **Dá um exemplo de:**

19.1. Um binómio de grau 5.

19.2. Um binómio de grau 3.

19.3. Um monómio de grau 1.

19.4. Um trinómio de grau 2.

19.5. Um trinómio de grau 1.

3.2.1. Soma algébrica e produto de polinómios

Exemplos:

Considerem-se os polinómios:

$$\boldsymbol{A(x\,,\ y) = x + 2y} \qquad\qquad \boldsymbol{B(x) = 5x^2 - 3x}$$

- $A + B = (x + 2y) + \left(5x^2 - 3x\right) = (x - 3x) + 2y + 5x^2 = -2x + 2y + 5x^2$
- $A \times B = (x + 2y) \times \left(5x^2 - 3x\right) =$

$= \left(x \times 5x^2\right) + [x \times (-3x)] + \left(2y \times 5x^2\right) + [2y \times (-3x)] =$

$= 5x^3 - 3x^2 + 10x^2y - 6xy$

Manual Digital

Vídeos

Adição de polinómios

Produto de polinómios

Para **adicionar** ou para subtrair **polinómios**, adicionam-se ou subtraem-se os seus termos semelhantes.

Para **multiplicar dois polinómios**, aplica-se a propriedade distributiva em relação à adição algébrica, multiplicando cada termo do primeiro polinómio por cada um dos termos do segundo polinómio.

Exercícios

20 Aplica as regras de operações com polinómios e escreve-os na forma reduzida.

20.1. $P(x) = 2x \times \left(3x^2 - 1\right) + 4x$

20.2. $Q(x\,,\ y\,,\ z) = (xy + z) \times (x - z) + z^2$

21 Efetua as seguintes operações.

21.1. $\left(x - 5x^2\right) + \left(4 - 3x^2 - x\right)$

21.2. $\left(x - 5x^2\right) \times \left(4 - 3x^2 - x\right)$

21.3. $(x - y) + \left(\dfrac{4x}{2} - 3 - y\right) + 7$

21.4. $7 \times (4x - 1) + (x + 9)$

22 Verifica se os polinómios G e H são iguais.

$$\boldsymbol{G(x\,,\ y) = (x - 3y)^2} \qquad\qquad \boldsymbol{H(x\,,\ y) = -6xy + 9y^2 + x^2}$$

23 Considera o polinómio $\boldsymbol{7x + 2x^2 \times (4x + 2) + 5 \times \left(x - 3x^2\right)}$.

23.1. Apresenta o polinómio na forma reduzida.

23.2. Indica o grau do polinómio.

23.3. O polinómio tem termo independente? Justifica.

3.2.2. Casos notáveis da multiplicação de polinómios

Quadrado de um binómio

Considera o quadrado, cujo lado mede $x+y$.

A área do quadrado é obtida através do quadrado do comprimento do lado:

	x	y
x	x^2	xy
y	xy	y^2

$$\text{Área} = \boldsymbol{(x+y)^2} = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = \boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2}$$

A igualdade $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ corresponde ao desenvolvimento do **quadrado de um binómio.**

O **quadrado de um binómio** obtém-se adicionando o quadrado do primeiro monómio ao dobro do produto do primeiro monómio pelo segundo monómio e ao quadrado do segundo monómio.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Exemplos:

- $(x+1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$
- $(3x-1)^2 = 9x^2 + 2 \times 3x \times (-1) + (-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$

Manual Digital

Vídeos

Casos notáveis da multiplicação de binómios: quadrado da soma ou da diferença

Casos notáveis da multiplicação de binómios: diferença de quadrados

Exercício

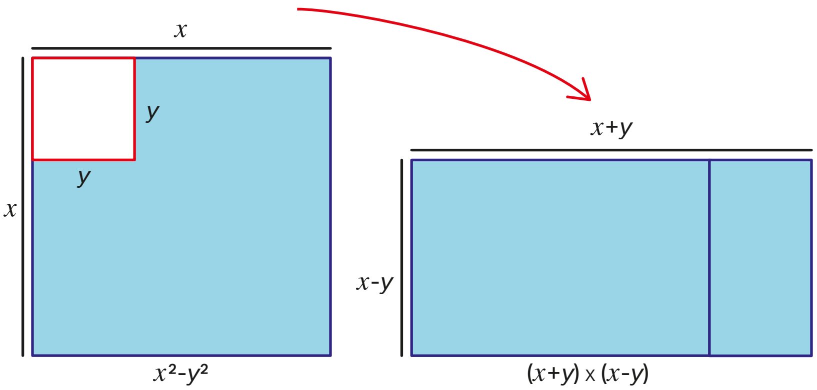
24 Desenvolve os seguintes quadrados de binómios.

24.1. $(x+3)^2$ **24.2.** $(x-3)^2$ **24.3.** $(2x+6)^2$ **24.4.** $(-x+7)^2$

Diferença de quadrados

Ao desenvolver o produto da soma de dois monómios pela sua diferença, obtemos a diferença de quadrados.

$$(x+y) \times (x-y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$$



A igualdade $\boldsymbol{(x+y) \times (x-y) = x^2 - y^2}$ corresponde ao caso notável da **diferença de quadrados.**

Ao desenvolver-se o produto da soma de dois monómios pela sua diferença, obtemos a **diferença de quadrados** desses monómios.

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

Exemplos:

- $(5x+y)(5x-y)=25x^2-5xy+5xy-y^2=25x^2-y^2$
- $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=x^2-2$

Exercícios

25 Utilizando o caso notável da diferença de quadrados, transforma as expressões diretamente num polinómio cada um dos seguintes produtos.

25.1. $(x+3)\times(x-3)$

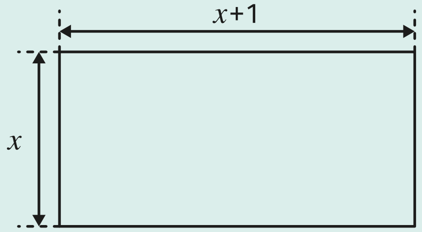
25.2. $(2x-1)\times(2x+1)$

25.3. $(9+x)\times(9-x)$

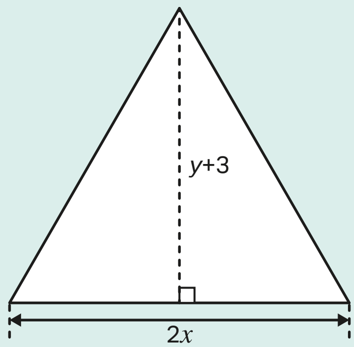
25.4. $(y+3a)\times(y-3a)$

26 Para cada uma das seguintes figuras, escreve a expressão da área como um polinómio na forma reduzida.

26.1.



26.2.



3.2.3. Fatorização de polinómios

Fatorizar um polinómio, ou **decompor um polinómio em fatores**, é transformar esse polinómio num produto em que pelo menos um dos fatores é um polinómio não constante.

Para fatorizarmos um polinómio podemos, caso seja possível, utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica, colocando o fator comum em evidência.

Com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica podemos transformar um produto numa soma ou uma soma num produto.

Transformar um produto numa soma		Transformar uma soma num produto
$a \times (x + y)$	$a \times x + a \times y$	$a \times (x + y)$

Vamos fatorizar $4x + 4y$, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica.

$$4x + 4y = 4\,(x + y)$$

Primeiro identificamos o fator comum (4). Em seguida, colocamos o fator comum em evidência, aplicando a propriedade distributiva.

Também podemos utilizar, caso seja possível, os **casos notáveis da multiplicação para fatorizar polinómios**.

Fatorizar polinómios usando a diferença de quadrados $x^2 - y^2 = (x + y) \times (x - y)$

Exemplos:

- $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4) \times (x - 4)$
- $2x^2 - 18 = 2 \times (x^2 - 9) = 2\,(x + 3) \times (x - 3)$

Fatorizar polinómios usando o quadrado de um binómio $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

Exemplos:

- $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \times 6 \times x + 6^2 = (x + 6)^2 = (x + 6) \times (x + 6)$
- $3x^2 - 24x + 48 = 3\,(x^2 - 8x + 16) = 3\left[x^2 + 2x\,(-4) \times x + (-4)^2\right] =$
  $= 3\,(x - 4)^2 = 3\,(x - 4) \times (x - 4)$

Exercício

27 Decompõe em fatores os seguintes polinómios.

27.1. $A = 2z - 2x$

27.2. $B = 27x + 9$

27.3. $C = yx^2 - x$

27.4. $D = x^2 - y^2$

27.5. $E = 16y^2 - 9x^2$

27.6. $F = 49 - 42y + 9y^2$

27.7. $E = 3xy^2 - 6xy + 3x$

Manual Digital

Vídeo
Fatorizar polinómios

Exercícios
Fatorizar polinómios

Operar com monómios e polinómios: volume do prisma

Para aplicar

1 Considera o seguinte monómio:

$$A = -\frac{5}{3}xy^3$$

1.1. Indica o coeficiente e a parte literal do monómio.

1.2. Indica o grau do monómio.

1.3. Apresenta o monómio simétrico e justifica a resposta.

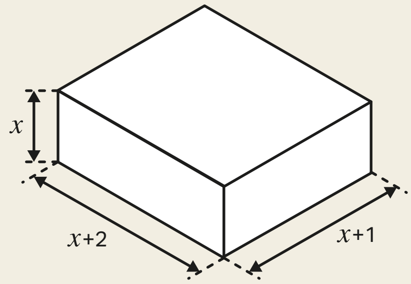
2 Apresenta cada um dos seguintes polinómios na forma reduzida e indica o respetivo grau.

2.1. $x \times (x+1) \times (x+1)$

2.2. $3y \times (x+2) - 3x \times (y+2)$

3 Sendo $20x+8$ a expressão algébrica que representa o perímetro de um quadrado, indica uma expressão algébrica que represente o comprimento do lado do mesmo quadrado.

4 Apresenta, sob a forma de um polinómio reduzido, uma expressão que represente o volume do paralelepípedo indicado na figura ao lado.



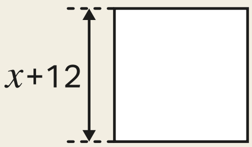
5 Decompõe no número máximo de fatores.

5.1. $4b+20$

5.2. $x^2 - 36$

5.3. $9 - 24x + 16x^2$

6 Na figura ao lado está representado um quadrado.
Mostra que a área do quadrado pode ser dada pela expressão: $x^2 + 24x + 144$.



7 Fixada uma unidade de medida, um cubo tem de aresta $x+2y$.

7.1. Apresenta uma expressão algébrica que represente a área da superfície do cubo.

7.2. Apresenta uma expressão algébrica que represente o volume do cubo.

Manual Digital

Vídeo
Equações do 2.º grau

3.3. Equações do 2.º grau

Recorda

Uma **equação** é uma igualdade em que figura, pelo menos, uma variável.

Considera a equação de 1.º grau $7 + x = 10$.

- $7 + x$ é o **primeiro membro**, porque fica à esquerda do sinal $=$.
- 10 é o **segundo membro**, porque fica à direita do sinal $=$.
- x, 7 e 10 são os **termos da equação.**
- x é a **incógnita** da equação.
- 7 e 10 são os **termos independentes** (termos de grau zero).
- 3 é **raiz** ou **solução da equação**, porque é um valor que, concretizando a incógnita, transforma a equação numa proposição verdadeira $(7 + 3 = 10)$.

Ao conjunto de soluções de uma equação chamamos **conjunto-solução**.
Resolver uma equação é determinar o seu conjunto-solução.
Duas **equações** são **equivalentes** quando têm o mesmo conjunto-solução.

Exercícios

28 Completa a seguinte tabela.

Equação	Incógnita	Termo(s) independente(s)	Solução da equação
$x + 2 = 5$			
$2x = 20$			
$y - 12 = 4$			
$3 + 5 = a$			

29 Considera as equações:

$$4 + x = 10\,; \qquad 12 - x = 7\,; \qquad 2x = 12$$

29.1. Verifica se 5, 6 e 7 são soluções de cada uma das equações.

29.2. Indica as equações que são equivalentes.

30 Resolve cada uma das seguintes equações.

30.1. $2x + 1 = 7 - x$

30.2. $4x + 1 = 29$

30.3. $x - 1 = 5x - 11 - 3x$

30.4. $2x + 1 = 7 - x$

As equações de 2.º grau surgem em registos de antigas civilizações do Egipto, da Mesopotâmia e da Grécia. As primeiras utilizações de que há conhecimento estão relacionadas com a necessidade de resolução de problemas práticos do quotidiano, maioritariamente associados a medições e à Geometria, como podemos verificar no seguinte problema.

Por exemplo:

Qual é o comprimento da base de um retângulo, sabendo que o comprimento da sua altura é igual ao dobro do comprimento da sua base e que a sua área é 50 cm^2?

Para resolver este problema, vamos seguir os seguintes passos:

1) Identificar a incógnita:

$$x \longleftarrow \text{comprimento da base}$$

2) Traduzir o problema matematicamente, na forma de uma equação:

$$x \times 2x = 50$$

3) Resolver a equação:

$$x \times 2x = 50 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 50 \Leftrightarrow x^2 = \frac{50}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \pm 5$$
$$\text{C.S.} = \{-5 ; 5\}$$

4) Interpretar o resultado obtido no contexto do problema:

Como o valor do comprimento não pode ser negativo, utilizamos o valor $+5$ para responder ao problema.

5) Responder ao problema:

O comprimento da base deste retângulo é 5 cm.

Uma **equação do 2.º grau** com uma incógnita é uma equação em que a incógnita surge com expoente 2, podendo também surgir com expoente 0 ou 1, mas não expoente superior a 2.

Uma equação do 2.º grau diz-se na sua **forma canónica** quando está na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \in \mathbb{R}\setminus\{0\};\ b \in \mathbb{R};\ c \in \mathbb{R}$$

Uma equação do 2.º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, denomina-se:

- **completa** quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$;
- **incompleta** quando $b = 0$ e/ou $c = 0$.

Exemplos:

	Equações do 2.º grau	
	Forma canónica	**Exemplos**
Completas	$ax^2+bx+c=0$	$x^2+2x-4=0$ $3x^2-\frac{2}{5}x-6=0$
Incompletas	$ax^2+bx=0$	$3x^2-\frac{2}{5}x=0$
	$ax^2+c=0$	$x^2-4=0$ $3x^2-6=0$
	$ax^2=0$	$x^2=0$ $-5x^2=0$

Exercício

31 Considera as seguintes equações.

i) $2x^2-8=0$ **ii)** $2x+7=0$ **iii)** $x^2-8+x=0$

iv) $2x^3-x+1=0$ **v)** $5x^2=0$ **vi)** $2x^2-x=0$

Indica as equações que são do 2.º grau, referindo se são completas ou incompletas.

3.3.1. Resolução de equações do 2.º grau incompletas

Resolução de equações do tipo $ax^2=0$

Para resolvermos equações do tipo $ax^2=0$, com $a\neq 0$, aplicamos o princípio da multiplicação, do seguinte modo:

$$ax^2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}\times ax^2=\frac{1}{a}\times 0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

Nota:
Este tipo de equações tem sempre uma única solução: $x=0$.

Problema resolvido 1

Resolve a equação: $3x^2=0$.

Resolução:

$3x^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{0}{3} \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

C.S. $=\{0\}$

Resolução de equações do tipo $ax^2 + c = 0$

Para resolvermos equações do tipo $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$, aplicamos os princípios da adição e da multiplicação, bem como a noção de raiz quadrada.

Problema resolvido 2

Resolve a equação: $3x^2 - 12 = 0$. (a e c com sinais contrários)

Resolução:

$3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$

C.S. $= \{-2\,;\ 2\}$

Problema resolvido 3

Resolve a equação: $2x^2 + 128 = 0$. (a e c com sinais iguais)

Resolução:

$2x^2 + 128 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -128 \Leftrightarrow x^2 = -64$ equação impossível

C.S. $= \{\ \}$

Exercício

32 Resolve as seguintes equações.

32.1. $x^2 = 0$ **32.2.** $2x^2 = 0$ **32.3.** $x^2 + 8 = 8$

32.4. $-y^2 + 49 = 0$ **32.5.** $2x^2 - 8 = 0$ **32.6.** $2x^2 + 124 = 0$

Resolução de equações do tipo $ax^2 + bx = 0$

Para resolvermos equações do tipo $ax^2 + bx = 0$, aplicamos os princípios da adição e da multiplicação, bem como a lei do anulamento do produto.

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-b}{a}$$

Problema resolvido 4

Resolve a equação: $x^2 - 4x = 0$.

Resolução:

$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

C.S. $= \{0\,;\ 4\}$

Nota:
Este tipo de equações tem sempre duas soluções, sendo uma delas nula.

Exercício

33 Resolve as seguintes equações, aplicando a lei do anulamento do produto.

33.1. $x^2+x=0$ **33.2.** $4x^2-8x=0$ **33.3.** $5x^2=10x$

33.4. $-x^2+x=0$ **33.5.** $7x^2+40x=-9x$ **33.6.** $-x^2-21x=-4x^2$

3.3.2. Resolução de equações do 2.º grau completas (processo de completar o quadrado)

Comecemos por estudar um processo para resolver equações do 2.º grau completas. Os dois exemplos seguintes consistem em transformar o polinómio do 2.º grau, ax^2+bx+c, numa expressão do tipo $a(x+d)^2+e$, em que d e e são números reais. Quando o primeiro membro é o desenvolvimento do quadrado de um binómio, aplica-se esse procedimento.

Problema resolvido 5

Resolve a equação: $x^2+10x+25=0$.

Resolução:

Como $x^2+10x+25$ é o desenvolvimento do quadrado do binómio $(x+5)^2$, então:

$x^2+10x+25=0 \Leftrightarrow (x+5)^2=0 \Leftrightarrow (x+5)(x+5)=0$

Aplicando a lei do anulamento do produto:

$(x+5)(x+5)=0 \Leftrightarrow x+5=0 \vee x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$

C.S. $=\{-5\}$

Quando o primeiro membro não é o desenvolvimento do quadrado de um binómio, podemos transformar o polinómio do 2.º grau ax^2+bx+c numa expressão do tipo: $a(x+d)^2+e$, em que d e e são números reais.

Problema resolvido 6

Resolve a equação: $x^2+4x-5=0$.

Resolução:

Aplicamos o procedimento de "completar o quadrado": $x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c$

$x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2-5=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{4}{2}\right)^2-2^2-5=0 \Leftrightarrow (x+2)^2-4-5=0 \Leftrightarrow (x+2)^2-9=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=9$

Por definição de raiz quadrada:

$(x+2)^2 = 9 \iff x+2=\sqrt{9} \lor x+2=-\sqrt{9} \iff$

$\iff x+2=3 \lor x+2=-3 \iff x=1 \lor x=-5$

$\text{C.S.} = \{-5\ ;\ 1\}$

Problema resolvido 7

Resolve a equação: $2x^2-5x-3=0$.

Resolução:

Aplicamos o procedimento de "completar o quadrado": $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$

$2x^2-3x-2=0 \iff 2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)-2=0$

$\iff 2\left[x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]-2=0 \iff 2\left[x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]-\frac{18}{16}-2=0$

$\iff 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{18}{16}-\frac{32}{16}=0 \iff 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{50}{16}$

$\iff \left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{50}{32} \iff \left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$

$\iff x-\frac{3}{4}=\sqrt{\frac{25}{16}} \lor x-\frac{3}{4}=-\sqrt{\frac{25}{16}}$

$\iff x-\frac{3}{4}=\frac{5}{4} \lor x-\frac{3}{4}=-\frac{5}{4} \iff x=\frac{5}{4}+\frac{3}{4} \lor x=-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}$

$\iff x=\frac{8}{4} \lor x=-\frac{2}{4} \iff x=2 \lor x=-\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\text{C.S.}=\left\{-\frac{1}{2};\ 2\right\}$

Ao procedimento de determinar, dado um polinómio do 2.º grau na variável x, ax^2+bx+c, uma expressão equivalente da forma $a(x+d)^2+e$, em que $d=\frac{b}{2a}$ e $e=-\frac{b^2}{4a}+c$ são números reais, designamos por "completar o quadrado".

Exercícios

34 Escreve os seguintes polinómios numa expressão equivalente da forma $a(x+d)^2+e$, em que a, d e e são números reais.

34.1. x^2+x+1 $\qquad$ **34.2.** $2x^2-8x+10$ $\qquad$ **34.3.** x^2+x

35 Resolve as seguintes equações.

35.1. $x^2+x+1=0$ $\qquad$ **35.2.** $2x^2-8x+10=0$ $\qquad$ **35.3.** $x^2+x=0$

3.3.3. Resolução de equações do 2.º grau completas – fórmula resolvente

Vejamos um segundo processo que permite resolver qualquer equação do 2.º grau, por aplicação da fórmula resolvente.
Sendo $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$, então:

$$ax^2+bx+c=0 \iff \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A expressão b^2-4ac designa-se por "**binómio discriminante**" ou simplesmente "discriminante".
Normalmente, o binómio discriminante representa-se pela letra grega Δ (delta).

$$\Delta=b^2-4ac$$

Fórmula resolvente: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

O binómio discriminante permite identificar o número de soluções reais de uma equação do 2.º grau:

- Se $\Delta=0$, a equação é possível e tem apenas **uma solução dupla**.
- Se $\Delta>0$, a equação é possível e tem **duas soluções distintas**.
- Se $\Delta<0$, a equação é impossível em $\mathbb{R}$, isto é, **não tem soluções reais**.

Para provarmos a fórmula resolvente e efetuar a sua dedução podemos aplicar vários métodos.

Vamos efetuar a dedução através da utilização do caso notável $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$ax^2+bx+c=0$

$x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$ com $A=x$; $2AB=\dfrac{b}{a}x$; $B=\dfrac{b}{2a}$

$x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2=-\dfrac{c}{a}+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ então: $x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}x\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \iff \left(x+\frac{b}{2a}x\right)^2=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2} \iff$$

$$x+\frac{b}{2a}x=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \iff x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Problema resolvido 8

Resolve a equação $x^2-4x+3=0$, utilizando a fórmula resolvente.

Manual Digital

Vídeos
Fórmula resolvente

Binómio discriminante

Manual Digital

Exercício
Relacionar o valor do binómio discriminate e o número de soluções da equação

Resolução:

$a = 1$

$b = -4$

$c = 3$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$

$\Delta = 4 > 0$

A equação tem duas soluções distintas.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4+2}{2} \vee x = \frac{4-2}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \vee x = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$

$\text{C.S.} = \{1\,;\,3\}$

Problema resolvido 9

Resolve a equação $3x^2 + 24x + 48 = 0$, utilizando a fórmula resolvente.

Resolução:

$a = 3$

$b = 24$

$c = 48$

$\Delta = 24^2 - 4 \times 3 \times 48 = 0$

$\Delta = 0$

A equação tem uma solução.

$$3x^2 + 24x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \times 3 \times 48}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{0}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-24}{6} \Leftrightarrow x = -4$$

$\text{C.S.} = \{-4\}$

Exercícios

36 Para cada uma das seguintes equações, determina o número de soluções reais e resolve-as, caso seja possível, utilizando a fórmula resolvente.

36.1. $x^2 = 0$ **36.2.** $2x^2 = 0$ **36.3.** $x^2 + 8 = 8$

36.4. $-y^2 + 49 = 0$ **36.5.** $2x^2 - 8 = 0$ **36.6.** $2x^2 + 124 = 0$

37 Resolve, utilizando a fórmula resolvente, cada uma das seguintes equações.

37.1. $2x^2 - 12x + 16 = 0$ **37.2.** $x(x-3) = 40$ **37.3.** $x^2 + 3x - 1 = 8$

Problema resolvido 10

Resolve a equação $3x^2 + 12 = 0$, utilizando a fórmula resolvente.

Resolução:

$a = 3$

$b = 0$

$c = 12$

$\Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times 12 = 0$

$\Delta = -144 > 0$

A equação não tem solução.

$$3x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4 \times 3 \times 12}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pm\sqrt{-144}}{6} \quad \text{equação impossível}$$

$\text{C.S.} = \{\}$

3.3.4. Soma e produto das soluções de uma equação de 2.º grau

A soma e o produto entre soluções (raízes) de uma equação de 2.º grau são expressões matemáticas que podem ser utilizadas para encontrar os valores numéricos das raízes em si.
Se x_1 e x_2 são as raízes de uma equação do 2.º grau $(ax^2+bx+c=0)$, então:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

Manual Digital

Exercício
Resolver um problema geométrico (áreas) usando uma equação do 2.º grau

Exercício

38 **Sabendo que uma equação do 2.º grau tem raízes $x_1=1$ e $x_2=2$ e que o seu termo independente é -2, apresenta a equação na forma reduzida.**

3.3.5. Problemas geométricos e algébricos envolvendo equações de 2.º grau

Como já referido, as equações do 2.º grau surgiram, ao longo da História, muitas vezes associadas a problemas de Geometria.
Um dos problemas conhecidos, encontrado na antiga Mesopotâmia, atual Iraque, data de aproximadamente 1700 a.C., é o problema seguinte:

Problema resolvido 11

Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado é 870?

Resolução:

Para resolver problemas que envolvam equações do 2.º grau, podemos seguir os seguintes passos:

1) Identificar a incógnita.
2) Traduzir o problema matematicamente, na forma de uma equação.
3) Resolver a equação.
4) Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.
5) Responder ao problema.

1) Identificar a incógnita:

$$x \longleftarrow \text{lado do quadrado}$$

2) Traduzir o problema matematicamente, na forma de uma equação:

$$x^2-x=870$$

3) Resolver a equação:

$$x^2-x=870 \Leftrightarrow x^2-x-870=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-870)}}{2\times1}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{3481}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1\pm59}{2} \Leftrightarrow x=30 \vee x=-29$$

$\text{C.S.}=\{-29\,;\,30\}$

4) Interpretar o resultado obtido no contexto do problema:

Como o valor do lado não pode ser negativo, utilizamos o valor 30 para responder ao problema.

5) Responder ao problema:

O lado do quadrado é 30.

Para aplicar

1 Considera a equação:

$$3(x+1)(x+2)=0$$

1.1. Resolve a equação, aplicando a lei do anulamento do produto.

1.2. Escreve a equação na forma canónica.

1.3. Resolve a equação utilizando a fórmula resolvente.

2 Escreve e resolve uma equação do 2.º grau de modo a admitir:

2.1. uma só solução: $x=5$.

2.2. duas soluções: $x=7$ ou $x=4$.

2.3. zero soluções.

2.4. duas soluções: $x=-3$ ou $x=3$.

3 Escreve na forma canónica cada uma das equações seguintes e, utilizando o método que considerares mais adequado, resolve as equações.

3.1. $x^2-4x=-2x$

3.2. $1-x^2+x=0$

3.3. $x^2+8=8$

3.4. $6x^2-10x=4$

3.5. $\frac{1}{2}x^2+8=16$

3.6. $1-(1-x)^2=2x+2$

4 Mostra que qualquer equação do 2.º grau, $ax^2+bx+c=0$, com $a\neq 0$, é equivalente à equação $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

(Sugestão: recorre ao processo de "completar o quadradro".)

5 O senhor Joaquim tem um terreno, com forma retangular, cuja área é $200\ m^2$. O senhor Joaquim sabe que o comprimento do lado maior mede mais $10\ m$ do que o comprimento do lado menor. Quais são os comprimentos dos lados do terreno do senhor Joaquim?

6 Qual é o número natural cuja soma do seu quadrado com o seu triplo é 10?

7 Uma mãe tinha 25 anos quando a sua filha nasceu.

Se multiplicarmos as idades que possuem hoje, obtemos um produto igual a trinta vezes a idade da filha. Quais são as suas idades atuais?

3.4. Equações literais

Uma **equação literal** é uma equação que se obtém igualando duas expressões algébricas, em que surge mais do que uma variável.
O **grau de uma equação literal** corresponde ao maior grau dos seus termos.

Exemplos:

- O volume de um prisma quadrangular é dado pela expressão $\boldsymbol{V = A \times h}$, sendo:

$$V \longrightarrow \text{volume}$$
$$A \longrightarrow \text{área da base}$$
$$h \longrightarrow \text{altura}$$

  $V = A \times h$ é uma equação literal de grau 1.

  A igualdade $V = A \times h$ relaciona V, A e h. Se conhecermos a área da base e a altura, então V é a incógnita (valor desconhecido) e A e h são as constantes (valores conhecidos).

- A relação entre a velocidade (v), o espaço linear percorrido (e) e o tempo (t), quando a velocidade é constante, é dada por:
  - $v = \frac{e}{t}$, se pretendermos determinar v (incógnita) e conhecermos e e t (constantes).
  - $e = v \times t$, se pretendermos determinar e (incógnita) e conhecermos v e t (constantes).
  - $t = \frac{e}{v}$, se pretendermos determinar t (incógnita) e conhecermos v e e (constantes).

As expressões referidas nestes exemplos estabelecem uma igualdade entre duas expressões algébricas em que, para além da letra que consideramos como uma incógnita, contêm pelo menos uma letra que representa um valor conhecido (constante). Assim, cada uma das expressões é uma equação literal de grau 1.

Exercícios

39 Das seguintes expressões, indica as que são equações literais e os respetivos graus.

39.1. $a = \pi r^2$ **39.2.** $x - x^2 = 40$ **39.3.** $3x - 1 = y$

39.4. $y - 4 = 3 - y$ **39.5.** $x - 1 = by$ **39.6.** $x^2 = c_1^2 + c_2^2$

40 Dá exemplo de três fórmulas que conheças que sejam equações literais e indica os respetivos graus.

3.4.1. Resolução de equações literais do 1.º e 2.º graus

Resolução de equações literais do 1.º grau

Manual Digital

Exercício
Resolver equações literais do 2.º grau

Para resolver equações literais do 1.º grau, utilizam-se os princípios de equivalência estudados na resolução de equações do 1.º grau com uma incógnita.

Problema resolvido 12

Resolve a equação literal $4ax - 3ax = 4 + b$, com $a \neq 0$, uma constante conhecida, em ordem a x (considerando x a incógnita).

Resolução:

$4ax - 3ax = 4 + b \Leftrightarrow ax = 4 + b$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4+b}{a}$

Resolução de equações literais do 2.º grau

Para resolver equações literais do 2.º grau, utilizam-se os princípios de equivalência estudados na resolução de equações do 2.º grau com uma incógnita.

Problema resolvido 13

Resolve a equação literal $x^2 = 12a^2$, com $a > 0$, uma constante conhecida, em ordem a x (considerando x a incógnita).

Resolução:

$x^2 = 12a^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = +\sqrt{12a^2} \vee x = -\sqrt{12a^2}$

$\Leftrightarrow x = +a\sqrt{12} \vee x = -a\sqrt{12}$

$\Leftrightarrow x = +2a\sqrt{3} \vee x = -2a\sqrt{3}$

Problema resolvido 14

Resolve a equação literal $4x^2 + ax = 0$, com $a \neq 0$, uma constante conhecida, em ordem a x (considerando x a incógnita).

Resolução:

$4x^2 + ax = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(4x + a) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 4x + a = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 4x = -a$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\dfrac{a}{4}$

Exercícios

41 Resolve, em ordem a x, as seguintes equações.

41.1. $2x + a = b$

41.2. $3x - 1 = y$

41.3. $3(x - a) = 6a$

41.4. $b(x - b) = 0$

41.5. $a = \frac{xb}{2}$, com $b \neq 0$

41.6. $(a - 2) = \frac{1}{x}$, com $a \neq 2$ e $x \neq 0$

41.7. $x^2 = a^2$

41.8. $x^2 + 4bx = 0$

42 Resolve as seguintes equações em ordem à variável indicada. Considera que as restantes letras representam constantes não nulas.

42.1. $a = \frac{b \times h}{2}$ (em ordem a h)

42.2. $p = 2\pi r$ (em ordem a r)

42.3. $x^2 = c_1^2 + c_2^2$ (em ordem a x)

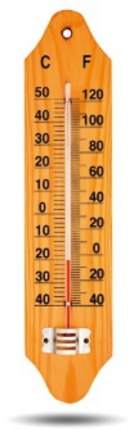
42.4. $x^2 = c_1^2 + c_2^2$ (em ordem a c_1)

Problemas com equações literais

As equações literais surgem relacionadas com diversas ciências, tais como a Física, a Química e a Biologia, entre outras. Reconhecer e resolver problemas modelados por equações literais é fundamental para essas ciências.

Vamos resolver alguns problemas que envolvem equações literais. Para isso, vamos utilizar os princípios de equivalência para resolver as equações do 1.º e do 2.º graus com uma incógnita.

Problema resolvido 15



Alguns países, como Cabo Verde, utilizam para unidade de medida da temperatura o grau Celsius (°C). Outros países, como por exemplo os Estados Unidos da América, utilizam o grau Fahrenheit (°F).

Para converter uma temperatura em graus Celsius numa temperatura em graus Fahrenheit e reciprocamente, utiliza-se a equação literal:

$$\frac{F - 32}{9} = \frac{C}{5}$$

i) Calcula em graus Celsius a temperatura correspondente a 14 °F.

ii) Calcula em graus Fahrenheit a temperatura correspondente a 15 °C.

iii) Nas condições PTN, a água congela a 0 °C. Indica, em graus Fahrenheit, a temperatura de congelamento da água.

Resolução:

Para respondermos às questões deste problema, vamos resolver a nossa equação em ordem a C e em ordem a F.

- $\frac{F-32}{9}=\frac{C}{5} \Leftrightarrow \frac{C}{5}=\frac{F-32}{9} \Leftrightarrow C=\frac{5F-160}{9}$ (equação resolvida em ordem a C)
- $\frac{F-32}{9}=\frac{C}{5} \Leftrightarrow F-32=\frac{9C}{5} \Leftrightarrow F=\frac{9C}{5}+32$ (equação resolvida em ordem a F)

i) $C=\frac{5F-160}{9}=\frac{5\times 14-160}{9}=\frac{-90}{9}=-10\ °\text{C}$

ii) $F=\frac{9\times C}{5}+32=\frac{9\times 15}{5}+32=27+32=59\ °\text{F}$

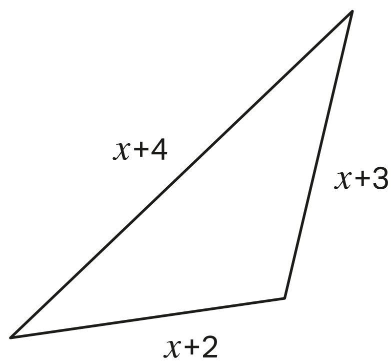
iii) $F=\frac{9\times C}{5}+32=\frac{9\times 0}{5}+32=0+32=32\ °\text{F}$

Na Matemática é comum, como já foi possível verificar, utilizar equações literais na Geometria, em particular no cálculo de perímetros, áreas e volumes. O próximo problema explora a utilização de equações literais na resolução de situações relacionadas com a Geometria.

Problema resolvido 16

Considera o triângulo apresentado na figura.

As medidas estão expressas em centímetros.



i) Apresenta uma equação literal que permita determinar o perímetro do triângulo, designando por p o perímetro.

ii) Qual é o perímetro do triângulo se $x=2$ cm?

iii) Resolve a equação, obtida em **i)** em ordem a x.

iv) Quais são as medidas dos lados dos triângulos se o perímetro for 75 cm?

Resolução:

i) $p=(x+4)+(x+2)+(x+3)=3x+9$

$p=3x+9 \longleftarrow$ equação literal

ii) Se $x=2$ cm, então $p=3\times 2+9=15$

O perímetro do triângulo é 15 cm.

iii) $p=3x+9 \Leftrightarrow -3x=9-p \Leftrightarrow x=\frac{9-p}{-3} \Leftrightarrow x=\frac{p-9}{3} \Leftrightarrow x=\frac{p}{3}-3$

$x=\frac{p}{3}-3 \longleftarrow$ equação literal

iv) Se $p=75$ cm, então, $x=\frac{75}{3}-3=25-3=22$

$l_1=22+4=26$; $l_2=22+2=24$; $l_3=22+3=25$

As medidas dos lados do triângulo são 26 cm, 24 cm e 25 cm.

Exercícios

43 **O índice de massa corporal (IMC) de uma pessoa é dado pela expressão:**

$$i = \frac{p}{h^2}$$

$i \longrightarrow$ **índice de massa corporal**
$p \longrightarrow$ **massa da pessoa (em kg)**
$h \longrightarrow$ **altura da pessoa (em metros)**

43.1. Resolve, em ordem a p, a equação literal.

43.2. A Organização Mundial da Saúde classifica o IMC de acordo com a tabela seguinte.

IMC	Classificação
18,5 a 24,9	Peso normal
25 a 29,9	Sobrepeso
30 a 34,9	Obesidade grau I
35 a 40	Obesidade grau II

a) Classifica o IMC de uma pessoa com 67 kg e 168 cm de altura.

b) Classifica o teu IMC.

43.3. Determina a altura de uma pessoa com 72 kg e IMC igual a 23.

44 **A fórmula $A = \pi r^2$ permite determinar a área de um círculo de raio r.**

44.1. Resolve a equação em ordem a r.

44.2. Determina o raio de um círculo de área igual a 49π cm^2.

44.3. Um círculo pode ter área igual a π^3 cm^2? Justifica a tua resposta.

45 **A equação $m = \frac{5}{8}k$ relaciona milhas terrestres (m) com quilómetros (k).**

45.1. Resolve a equação em ordem a k.

45.2. Quantos quilómetros correspondem a 100 milhas?

Para aplicar

1 Em cada uma das seguintes equações, x, y e z são incógnitas e a, b e c são constantes não nulas, com $a > b$.
Resolve as equações em relação à variável indicada.

1.1. $2x - 3z = 2a^2$ (em ordem a x)
1.2. $2x - 3z = 2a^2$ (em ordem a z)
1.3. $x^2 + y = bc$ (em ordem a y)
1.4. $x^2 = a^2 - b^2$ (em ordem a x)

2 Considera a equação literal.

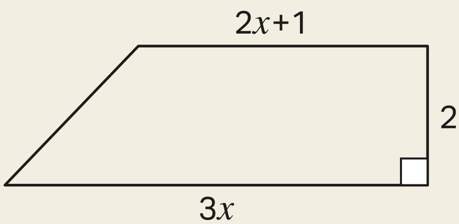
$$2y - 4x = 0$$

2.1. Resolve a equação em ordem a x.
2.2. Resolve a equação em ordem a y.

3 Resolve, em ordem a x, cada uma das seguintes equações.

3.1. $4ax^2 + 4bx = 0$, com $a \neq 0$.
3.2. $ab = \frac{x-b}{4}$, com $x \neq b$.

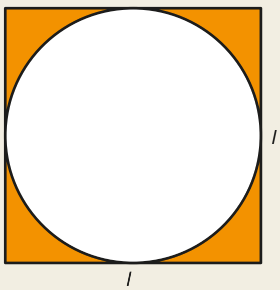
4 Considera o trapézio da figura ao lado.



4.1. Mostra que a expressão $A = 5x + 1$ representa a área do trapézio.

4.2. Determina o comprimento das bases, se a área do trapézio for 41 m^2.

5 Considera o quadrado A, de lado l, e um círculo nele inscrito.



5.1. Escreve uma expressão que represente a área do círculo.

5.2. Mostra que a área do quadrado (A) que não está preenchida pelo círculo é dada pela expressão:

$$A = \frac{l^2(4-\pi)}{4}$$

5.3. Resolve a equação da alínea anterior em ordem a l.

6 A fórmula $v = \pi r^2 h$ corresponde ao volume de um cilindro, em que r é o raio da base e h a altura do cilindro.

6.1. Resolve a equação em ordem a r.

6.2. Indica a medida do raio de um cilindro de volume igual a $300\pi\text{ cm}^3$ e altura 12 cm.

6.3. Indica a medida da altura de um cilindro de volume igual a $128\pi\text{ m}^3$ e raio da base 4 m.

3.5. Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas

Manual Digital

Vídeo
Sistemas equivalentes

Para iniciarmos o estudo de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas, vamos começar por resolver o seguinte problema:

A soma da idade do Pedro com a idade da Rita é 20 e a soma da idade do Pedro com o dobro da idade da Rita é 28. Quais são as idades do Pedro e da Rita?

Como temos dois valores desconhecidos, vamos atribuir letras a cada uma das incógnitas:

$x \longleftarrow$ "idade do Pedro" $\qquad$ $y \longleftarrow$ "idade da Rita"

Deste modo, podemos representar as duas situações através de duas equações literais:

- $x + y = 20$ (a soma da idade do Pedro com a idade da Rita é 20)
- $x + 2y = 28$ (a soma da idade do Pedro com o dobro da idade da Rita é 28)

Estas duas equações literais formam um **sistema de duas equações com duas incógnitas**. O sistema de duas equações com duas incógnitas pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 2y = 28 \end{cases}$$

Resolver este sistema consiste em determinar, caso existam, as soluções comuns às duas equações.
Repara que, neste caso, se fizermos $x = 12$ e $y = 8$, nas duas equações obtemos proposições verdadeiras. $(x\,,\ y) = (12\,;\ 8)$ é a solução deste sistema.
A idade do Pedro é de 12 anos e a idade da Rita é de 8 anos.

Um **sistema** de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas diz-se na **forma canónica** se apresenta a configuração $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$, em que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ representam as **incógnitas** e $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{f}$ são as **constantes**.

Quando dois ou mais sistemas têm o mesmo conjunto-solução, os **sistemas** são **equivalentes**.

Exercício

46 Escreve cada um dos seguintes sistemas na forma canónica.

46.1. $\begin{cases} x = y \\ 10 - y = x \end{cases}$

46.2. $\begin{cases} 2x - 4 = y \\ 3 = x + 4y \end{cases}$

46.3. $\begin{cases} x + y - 3 = -2y \\ 10 - 3y = 2(x + 1) \end{cases}$

46.4. $\begin{cases} x - 1 = y \\ 2x - 3(y - 2) = x \end{cases}$

46.5. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = y \\ y = x - \dfrac{3}{4} \end{cases}$

46.6. $\begin{cases} x - 4 = y\left(3 + \dfrac{7}{4}\right) \\ 10(x + y) - y = x \end{cases}$

3.5.1. Resolução de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas

Manual Digital

Vídeo
Resolver sistemas pelo método da substituição

Para resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas existem vários métodos.

De seguida, apresentam-se três métodos distintos: o método de substituição, o método da adição ordenada e a regra de Cramer.

Resolução de sistemas pelo método de substituição

Para resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas através do **método de substituição**, aplicam-se os seguintes procedimentos:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

1.º Resolver uma das equações em ordem a uma das incógnitas.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

2.º Substituir, na outra equação, essa incógnita pela expressão obtida.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ 2(5-y)+y=7 \end{cases}$$

3.º Resolver a equação do 1.º grau que resulta da substituição, obtendo o valor de uma das incógnitas.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ 10-2y+y=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ -y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-y \\ y=3 \end{cases}$$

4.º Substituir o valor da incógnita encontrada na outra equação e resolver a equação.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-3 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

A solução do sistema é o par ordenado $(x\,;\ y)=(2\,;\ 3)$.

Conjunto-solução: $\{(2\,;\ 3)\}$

Exercício

47 Resolve os seguintes sistemas pelo método de substituição.

47.1. $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ **47.2.** $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ **47.3.** $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+2y=5 \end{cases}$

47.4. $\begin{cases} 1-x=y \\ y+x=1 \end{cases}$ **47.5.** $\begin{cases} 2x+2y=14 \\ 10x+5y=40 \end{cases}$ **47.6.** $\begin{cases} 2x+2(y+1)=8 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$

Resolução de sistemas pelo método da adição ordenada

Para resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas, na forma canónica, através do **método da adição ordenada**, aplicam-se os seguintes procedimentos:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

1.º Transformar uma das equações numa equação equivalente, de modo que os coeficientes associados a uma das incógnitas nas duas equações fiquem simétricos.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -2x - y = -7 \end{cases}$$

2.º Adicionar as duas equações, de modo a anular uma das incógnitas.

$$+\begin{cases} x + y = 5 \\ -2x - y = -7 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad -x = -2}$$

3.º Resolver a equação do 1.º grau que resultou da adição e obter o valor de uma incógnita.

$$-x = -2$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

4.º Substituir o valor da incógnita encontrado numa das equações iniciais e obter o valor da segunda incógnita.

$$2 + y = 5$$
$$\Leftrightarrow y = 5 - 2$$
$$\Leftrightarrow y = 3$$

A solução do sistema é o par ordenado $(x\,;\,y) = (2\,;\,3)$.

Conjunto-solução: $\{(2\,;\,3)\}$

Exercício

48 Resolve os seguintes sistemas pelo método da adição ordenada.

48.1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

48.2. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

48.3. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

48.4. $\begin{cases} 1 - x = y \\ y + x = 1 \end{cases}$

48.5. $\begin{cases} 2x + 2y = 14 \\ 10x + 5y = 40 \end{cases}$

48.6. $\begin{cases} 2x + 2(y + 1) = 8 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

Resolução de sistemas com a regra de Cramer

Vamos aplicar o método de substituição para encontrar uma solução genérica para o sistema.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax=c-by \\ dx+ey=f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-by}{a} \\ d\left(\dfrac{c-by}{a}\right)+ey=f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-by}{a} \\ \dfrac{cd-bdy}{a}+ey=f \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-by}{a} \\ \dfrac{cd-bdy}{a}+\dfrac{aey}{a}=\dfrac{af}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-by}{a} \\ cd-bdy+aey=af \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-by}{a} \\ -bdy+aey=af-cd \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-by}{a} \\ y(ae-bd)=af-cd \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-by}{a} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-b\left(\dfrac{af-cd}{ae-bd}\right)}{a} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c}{a}-\dfrac{b(af-cd)}{a(ae-bd)} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c(ae-bd)-b(af-cd)}{a(ae-bd)} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ace-bcd-abf+bcd}{a(ae-bd)} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ace-abf}{a(ae-bd)} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a(ce-bf)}{a(ae-bd)} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ce-bf}{ae-bd} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$$

Genericamente, pode então encontrar-se a solução do sistema pela fórmula:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ce-bf}{ae-bd} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$$

Aplicando esta fórmula, estamos a usar a regra de Cramer, que pode ser útil para resolução de sistemas ou na confirmação de soluções.

Analisar o denominador da regra de Cramer permite apoiar na classificação de sistemas.

Chamamos ao número $ae-bd$ de **determinante do sistema**.

- Se $ae-bd\neq 0$, então o sistema é possível e determinado.
- Se $ae-bd=0$, então o sistema é impossível ou possível e indeterminado.

Exercício

49 Verifica, utilizando a regra de Cramer, as soluções obtidas na resolução do exercício 48.

49.1. $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ **49.2.** $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ **49.3.** $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+2y=5 \end{cases}$

49.4. $\begin{cases} 1-x=y \\ y+x=1 \end{cases}$ **49.5.** $\begin{cases} 2x+2y=14 \\ 10x+5y=40 \end{cases}$ **49.6.** $\begin{cases} 2x+2(y+1)=8 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$

3.5.2. Classificação de sistemas

Um **sistema** é **possível e determinado** quando tem uma só solução, ou seja, quando apenas existe um par ordenado de números que verifica simultaneamente as duas equações.

Exemplo:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10-y \\ x-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10-y \\ 10-y-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10-y \\ -2y=4-10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=10-y \\ -2y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10-y \\ y=\dfrac{-6}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10-y \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10-3 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$$

A solução do sistema é o par ordenado $(x\,;\ y)=(7\,;\ 3)$.

Conjunto-solução: $\{(7\,;\ 3)\}$

O sistema $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$ tem uma única solução, por isso é um sistema possível e determinado.

Um **sistema** é **possível e indeterminado** quando tem um número infinito de soluções.

Exemplo:

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 2(1+2y)-4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 2+4y-4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 0y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x-1}{2} \\ 0y=0 \end{cases}$$

A equação $0y=0$ é uma equação indeterminada, porque qualquer valor de y é solução desta equação.

Todos os pares ordenados $\left(x\,,\ \dfrac{x-1}{2}\right)$ são soluções do sistema.

Um **sistema** é **impossível** quando não tem nenhuma solução.

Exemplo:

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x-6y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 3(1+2y)-6y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 3+6y-6y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 6y-6y=2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ 0y=-1 \end{cases}$$

A equação $0y=-1$ é uma equação impossível. Assim, o sistema é impossível.

Exercício

50 Classifica os seguintes sistemas de duas equações com duas incógnitas.

50.1. $\begin{cases} x=5-y \\ x+y=7 \end{cases}$ **50.2.** $\begin{cases} 2x+6y=8 \\ x+3y=8 \end{cases}$ **50.3.** $\begin{cases} 2y-x=8 \\ 3x=y+1 \end{cases}$

50.4. $\begin{cases} x+y=3 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{3}=1 \end{cases}$ **50.5.** $\begin{cases} 7x-14y=1 \\ -y-4=x \end{cases}$ **50.6.** $\begin{cases} x=2(x+3) \\ 12y-x=2x-y \end{cases}$

Interpretar graficamente sistemas de duas equações de 1.º grau

Considera o sistema: $\begin{cases} x+y=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$

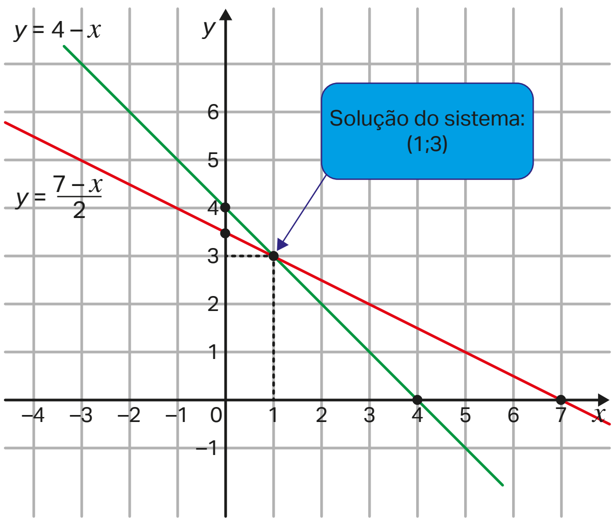
Resolver este sistema é determinar o par ordenado $(x;\ y)$, que é simultaneamente solução das duas equações.
Para resolver graficamente o sistema, temos de apresentar, num mesmo referencial, as retas que representam cada uma das equações.

$x+y=4 \Leftrightarrow y=4-x$

x	y
0	4
4	0

$x+2y=7 \Leftrightarrow y=\dfrac{7-x}{2}$

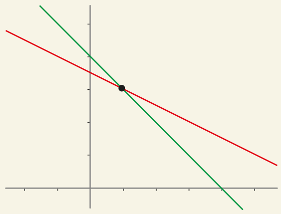
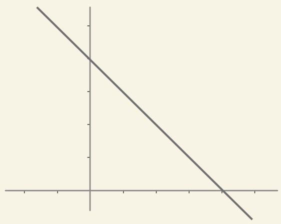
x	y
0	3,5
7	0



A interseção das retas de equações $y = 4 - x$ e $y = \frac{7 - x}{2}$ é o ponto de coordenadas $(1\ ;\ 3)$, que corresponde ao par ordenado que é solução do sistema.

Uma solução de um sistema de duas equações com duas incógnitas corresponde às coordenadas de um ponto de interseção das retas que representam as equações.

A interpretação gráfica de sistemas de duas equações permite classificar os sistemas.

Posição relativa das retas que representam as equações	**Gráfico**	**Classificação do sistema**
As duas retas são concorrentes (têm um ponto em comum).		Sistema possível e determinado. O sistema tem uma única solução.
As duas retas são estritamente paralelas (não têm nenhum ponto em comum).		O sistema é impossível.
As duas retas são coincidentes (têm todos os pontos em comum).		O sistema é possível e indeterminado. O sistema tem um número infinito de soluções.

Manual Digital

77

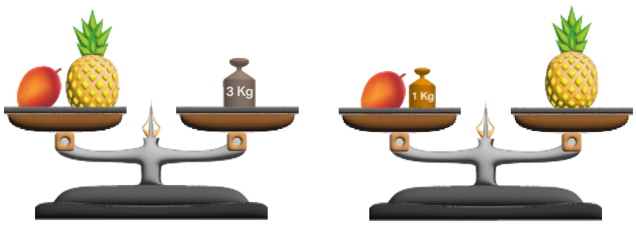
Vídeo
Resolver sistemas graficamente

Resolução de problemas envolvendo sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas

Como se verificou no início desta unidade, os sistemas de equações com duas incógnitas podem ser aplicados na resolução de problemas.

Problema resolvido 17

Observa a figura, que apresenta duas pesagens de um ananás e de uma papaia.
Qual será a massa do ananás?
E da papaia?



Primeira pesagem Segunda pesagem

Resolução:

$x \longleftarrow$ "massa do ananás"

$y \longleftarrow$ "massa da papaia"

Deste modo, podemos representar as duas situações através de duas equações literais:

$x + y = 3$ (equação da primeira pesagem)

$y + 1 = x$ (equação da segunda pesagem)

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y+1=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y+1=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y+y=3-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ 2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y=\frac{2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

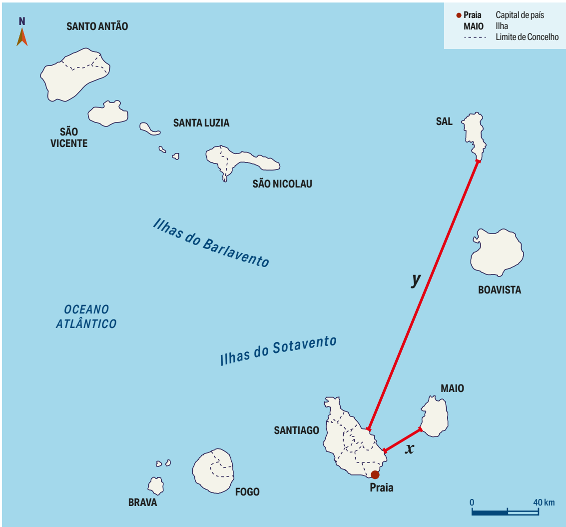
A massa do ananás é 2 kg e a massa da papaia é 1 kg.

Problema resolvido 18

Sabe-se que a soma da distância entre Santiago e Maio com a distância entre Santiago e o Sal é de 193 km.

Sabe-se também, que a diferença entre a distância entre Santiago e o Sal e o triplo da distância entre Santiago é de 87 km.

Determina a distância entre Santiago e Maio e a distância entre Santiago e o Sal.



Resolução:

$x \longleftarrow$ "distância entre Santiago e Maio"

$y \longleftarrow$ "distância entre Santiago e o Sal"

$$\begin{cases} x+y=193 \\ y-3x=87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=193-y \\ y-3(193-y)=87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=193-y \\ y-579+3y=87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=193-y \\ 4y=666 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=26{,}5 \\ y=166{,}5 \end{cases}$$

A distância entre Santiago e Maio é $26{,}5$ km e a distância entre Santiago e o Sal é $166{,}5$ km.

Exercícios

51 O Martim tem mais dez anos do que a Margarida e tem o dobro da idade da Margarida.

Utiliza um sistema para determinar as idades do Martim e da Margarida.

52 A Eliane gastou 400 escudos para comprar garrafas de água e pacotes de leite. Sabe-se que cada garrafa de água custa 50 escudos e que cada pacote de leite custa 100 escudos. Sabendo que o número de garrafas é o dobro do número de pacotes de leite, determina o número de garrafas de água e o número de pacotes de leite que a Eliane comprou.

Para aplicar

1 **Considera os seguintes sistemas:**

I. $\begin{cases} x+y-9=0 \\ 5x+4y=46 \end{cases}$ II. $\begin{cases} 3x+11=2y \\ -y+3x=-4 \end{cases}$ III. $\begin{cases} 5y+1=-2x \\ x+3y=-3 \end{cases}$

1.1. Apresenta os sistemas na forma canónica.

1.2. Resolve os sistemas pelo método da adição ordenada.

1.3. Resolve os sistemas pela regra de Cramer.

2 **Considera o sistema** $\begin{cases} x+y=10 \\ bx+ay=20 \end{cases}$.

Indica valores para as constantes a e b, de modo que:

2.1. o sistema seja possível e determinado.

2.2. o sistema seja impossível.

2.3. o par ordenado $(x\,;\ y)=(2\,;\ 8)$ seja solução do sistema.

3 **Considera o sistema** $\begin{cases} 2x=2y \\ x-18=-y \end{cases}$.

3.1. Escreve o sistema na forma canónica.

3.2. Justifica que o par ordenado $(x\,;\ y)=(9\,;\ 9)$ é solução do sistema.

4 **Mostra graficamente que o par ordenado $(x\,;y)=(0\,;\ 3)$ é solução do sistema.**

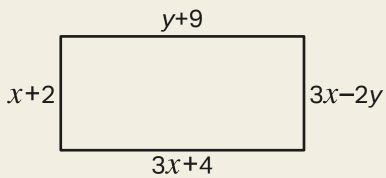
$$\begin{cases} x+y=3 \\ 3x-4y=-12 \end{cases}$$

5 **Verifica através da regra de Cramer e graficamente que o par ordenado $(x\,;\ y)=(2\,;\ -4)$ é solução do sistema.**

$$\begin{cases} -x+2y=-10 \\ \frac{1}{2}x+3y=-11 \end{cases}$$

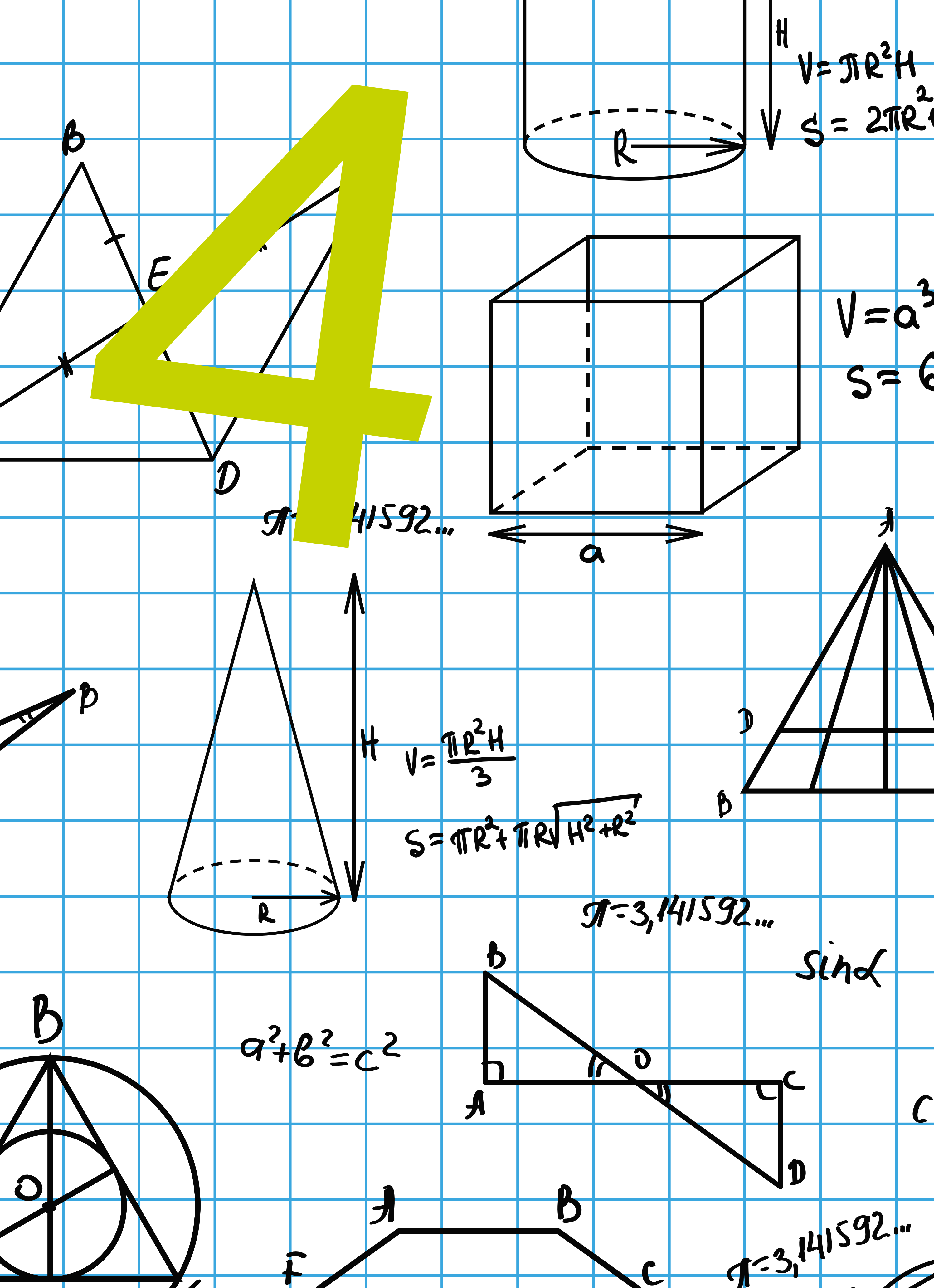
6 **A soma de dois números é 31 e a sua diferença é 3. Determina esses números.**

7 **Na figura está representado um retângulo e registadas expressões que representam as medidas dos seus lados. Calcula o perímetro do retângulo, após determinar os valores de x e y.**



8 **A senhora Maria e o senhor Rafael têm uma quinta e criam 120 animais, sendo os animais cabras e galinhas. Sabendo que o total de patas dos animais é 440, quantas cabras têm a senhora Maria e o senhor Rafael?**

4



$V = \pi R^2 H$
$V = a^3$
$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$
$S = \pi R^2 + \pi R\sqrt{H^2 + R^2}$
$\pi = 3,141592...$
$a^2 + b^2 = c^2$
$\sin\alpha$

Geometria e Medida

4 Geometria e Medida

Manual Digital

Vídeos
Axiomática de uma teoria

Elementos de Euclides: alguns axiomas e postulados

4.1. Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos

4.1.1. A geometria euclidiana e o axioma das paralelas

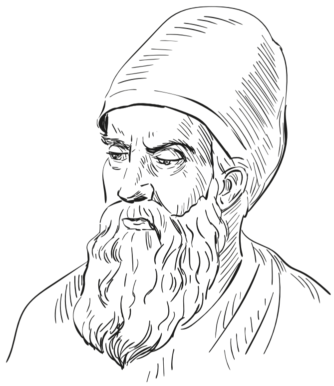
A palavra *geometria* deriva de duas palavras gregas:
- *geo* que significa Terra;
- *metron* que significa medida.

A Geometria, na Grécia Antiga, era a ciência empírica que agrupava métodos práticos que permitiam resolver problemas geométricos, em particular problemas que envolviam comprimentos, áreas e volumes.

Um dos matemáticos mais famosos desse período foi Euclides, que terá vivido aproximadamente de 330 a.C. a 260 a.C..

Euclides organizou e compilou o conhecimento geométrico desse período num conjunto de livros designados de *Elementos de Euclides*.

Para além de apresentar os resultados práticos existentes, Euclides demonstrou os seus resultados através de deduções lógicas, tendo como ponto de partida um conjunto de proposições geométricas elementares.


Euclides

Nos *Elementos de Euclides*, encontram-se cinco postulados:

1.° postulado: pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos;

2.° postulado: pode-se prolongar uma reta infinitamente;

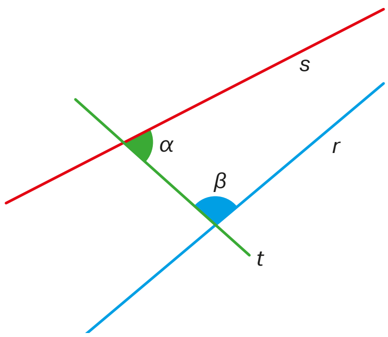
3.° postulado: pode-se traçar uma circunferência com quaisquer centro e raio;

4.° postulado: todos os ângulos retos são iguais;

5.° postulado: se duas retas num plano, intersetadas por uma terceira, determinam com esta ângulos internos do mesmo lado da secante cuja soma é inferior a um ângulo raso, então as duas retas intersetam-se no semiplano determinado pela secante que contém esses dois ângulos.

Atualmente, interpretamos o 5.° postulado de Euclides do seguinte modo:

Se $\hat{\alpha}+\hat{\beta}<180°$, então $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ intersetam-se no semiplano determinado pela reta $\boldsymbol{t}$ e que contém os ângulos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$.



Nos *Elementos de Euclides* existe uma distinção entre axiomas e postulados. Para Euclides, os axiomas consistiam em proposições elementares e evidentes que não careciam de ser provados. Já os postulados eram descritos, por Euclides, como proposições menos óbvias do que os axiomas, mas, no entanto, facilmente aceites.

Ao longo da História, vários foram os matemáticos que consideraram pouco óbvio o 5.° postulado de Euclides e tentaram prová-lo a partir dos quatro anteriores. Deste modo, a axiomatização da Geometria foi evoluindo e sendo aperfeiçoada ao longo dos tempos.

Um dos matemáticos que se destacou no aperfeiçoamento da Geometria Euclidiana foi David Hilbert, matemático alemão que viveu de 1862 a 1943.

David Hilbert aperfeiçoou a teoria axiomática ao considerar objetos primitivos (um ponto, uma reta e um plano) e ao estabelecer noções primitivas que permitiram compreender e desenvolver as relações entre os objetos primitivos, como por exemplo: "estar posicionado entre" ou "ser congruente com".

David Hilbert definiu o axioma euclidiano do paralelismo, equivalente ao 5.° postulado de Euclides. Enunciou assim este axioma, estabelecendo que, por um ponto exterior a uma reta, não passa mais do que uma reta a ela paralela.

David Hilbert

Manual Digital

Vídeo
Geometria Euclidiana

83

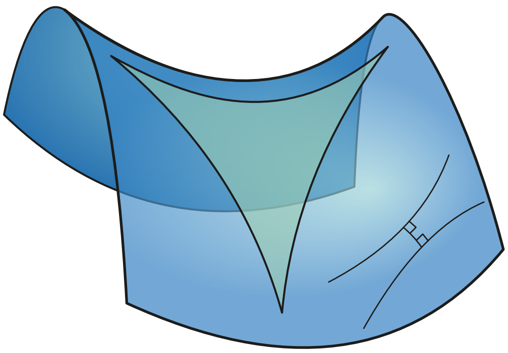
Vídeo
A Geometria Euclidiana e o axioma das paralelas

4.1.2. Geometrias não euclidianas

Atualmente, reconhece-se que é possível construir teorias modificando determinados axiomas da Geometria Euclidiana que incluam o 5.° postulado de Euclides, substituindo-o pela respetiva negação. Estas teorias que derivam da axiomática de Euclides designam-se por «geometrias não euclidianas». Como exemplo de uma teoria resultante da geometria não euclidiana, temos a geometria hiperbólica ou de Lobachevsky.

A geometria hiperbólica resulta da substituição do axioma euclidiano das paralelas pela sua negação, sendo esta a única alteração à axiomática original.

Nas geometrias não euclidianas, existem muitas propriedades distintas da geometria euclidiana. Por exemplo, na geometria hiperbólica, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é inferior a 180°.



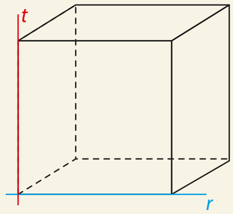
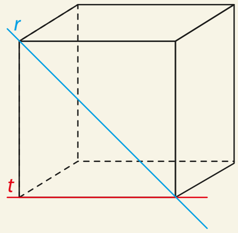
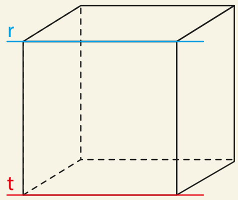
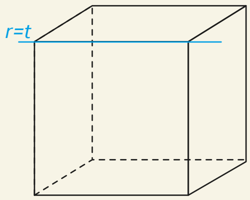
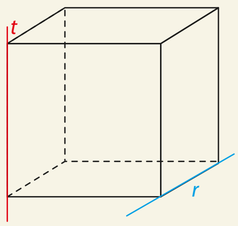
Manual Digital

Vídeo
Interseção de duas retas paralelas por uma reta

4.1.3. Posição relativa de duas retas no espaço euclidiano

Se duas retas, t e r, estão contidas num mesmo plano, então t e r são **retas complanares.**

Caso não exista nenhum plano que contenha simultaneamente as duas retas, então as retas são **não complanares.**

Posição relativa de duas retas complanares		
Duas retas são **concorrentes** se tiverem um único ponto em comum.	Duas retas concorrentes são **perpendiculares** quando os ângulos por elas formados têm amplitudes de $90°$.	
	Duas retas concorrentes são **oblíquas** quando os ângulos por elas formados não têm amplitudes de $90°$.	
Duas retas são **paralelas** se não forem concorrentes.	Duas retas complanares são **estritamente paralelas** se não têm nenhum ponto em comum.	
	Duas retas são **coincidentes** se têm todos os pontos em comum.	
Posição relativa de duas retas não complanares		
Retas **não complanares**	Duas retas são **não complanares** se não existe nenhum plano que contenha simultaneamente as duas retas.	

Exercícios

1 **Na figura está representado o prisma quadrangular $[ABCDEFGH]$. Utilizando as letras da figura, indica:**

1.1. duas retas perpendiculares;

1.2. duas retas oblíquas;

1.3. duas retas estritamente paralelas;

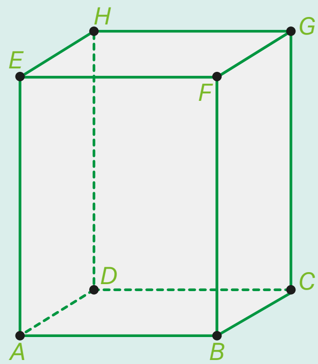
1.4. duas retas coincidentes;

1.5. duas retas paralelas;

1.6. a posição relativa das retas AB e DC;

1.7. a posição relativa das retas HD e GH;

1.8. a posição relativa das retas EF e CG.



2 **Indica se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Corrige as afirmações falsas.**

I) O 4.º postulado refere que todos os ângulos retos são iguais.

II) Euclides foi um matemático grego que viveu no século XIX.

III) Em todas as geometrias, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é inferior a $180°$.

IV) A palavra geometria deriva das palavras do latim "geo" e "metron".

Na Geometria Euclidiana, tal como em outras geometrias, são tomadas como verdadeiras algumas frases, sentenças ou proposição. Por tal, essas sentenças não se provam nem demonstram por serem consideradas óbvias ou por serem consensuais e necessárias para a construção da teoria. Essas proposições designam-se de axiomas.

Como já se referiu, o axioma euclidiano das paralelas diferencia a Geometria Euclidiana de outras geometrias.

O **Axioma das Paralelas** diz o seguinte:
Por um ponto exterior a uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

A partir deste axioma, podemos demonstrar o seguinte resultado:

Propriedade

Se uma reta interseta uma de duas retas paralelas e com elas é complanar, então interseta a outra.

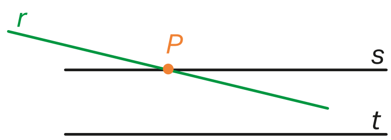
Hipóteses:

– As retas s e t são paralelas.

– As retas r e s são complanares.

– As retas r e t são complanares.

– A reta r interseta a reta s num ponto.



Tese: A reta r interseta a reta t.

Demonstração:

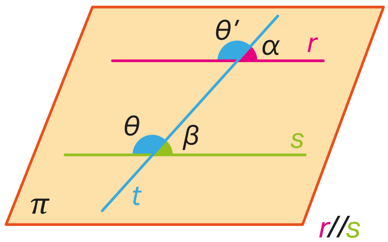
Seja P o ponto de interseção da reta r com a reta s.

Sabemos, pelo axioma das Paralelas, que pelo ponto P passa apenas uma única reta paralela à reta t.

Como as retas s e t são paralelas e a reta r é distinta de s, a reta r não pode ser paralela à reta t.

Assim, como as retas r e t são complanares (estão no mesmo plano), elas intersetam-se. ■

Os ângulos correspondentes determinados por uma secante a duas retas paralelas têm a mesma amplitude.



Hipotese: A reta t é uma reta secante às retas paralelas r e s.

Tese: Os ângulos correspondentes determinados pela reta t nas retas paralelas r e s têm a mesma amplitude.

Demonstração:

Seja θ o ângulo suplementar de β $\left(\hat{\beta}+\hat{\theta}=180^\circ\right)$.

Temos três possibilidades para $\hat{\alpha}+\hat{\theta}$:

1) Se $\hat{\alpha}+\hat{\theta}<180^\circ$, pelo 5.º postulado de Euclides as retas r e s seriam secantes, o que não é possível, porque, por hipótese, r e s são retas paralelas.

2) Se $\hat{\alpha}+\hat{\theta}>180^\circ$, pelo 5.º postulado de Euclides as retas r e s seriam secantes, o que também não é possível, porque, por hipótese, r e s são retas paralelas.

3) Então, resta-nos que $\hat{\alpha}+\hat{\theta}=180^\circ$ e, consequentemente, $\hat{\alpha}+\hat{\theta}=\hat{\beta}+\hat{\theta}$.

Logo, concluímos que $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$. ■

Transitividade do paralelismo entre retas

Duas retas paralelas a uma terceira, num dado plano, são paralelas entre si.

Exercício

3 Efetua a demonstração da propriedade anterior.

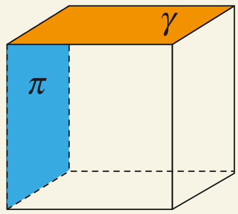
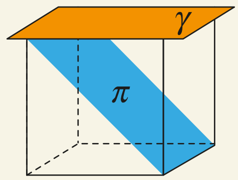
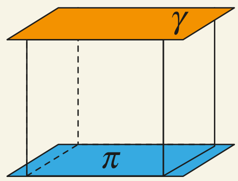
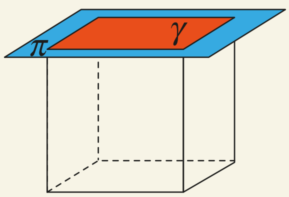
Manual Digital

Vídeo
Posição relativa de dois planos

4.1.4. Posição relativa de dois planos no espaço euclidiano

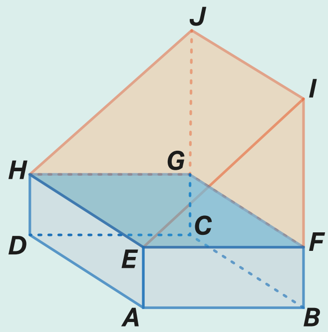
Se dois planos γ e π tiverem uma, e uma só, reta em comum, então γ e π são **planos concorrentes.**

Se dois planos γ e π não forem concorrentes, então os planos são **paralelos.**

Posição relativa de dois planos		
Dois planos são **concorrentes** se tiverem uma única reta em comum.	Dois planos concorrentes são **perpendiculares** quando os ângulos por eles formados têm amplitudes de $90°$.	
	Dois planos concorrentes são **oblíquos** quando os ângulos por eles formados não têm amplitudes de $90°$.	
Dois planos são **paralelos** se não forem concorrentes.	Dois planos são **estritamente paralelos** se não têm nenhuma reta em comum.	
	Dois planos são **coincidentes** se têm todas as retas em comum.	

Exercícios

4 Na figura seguinte está representado um sólido que pode ser decomposto no prisma quadrangular reto $[ABCDEFGH]$ e no prisma triangular reto $[EFGHIJ]$.
Usando as letras da figura, indica:



4.1. dois planos perpendiculares;

4.2. dois planos estritamente paralelos;

4.3. dois planos oblíquos;

4.4. dois planos coincidentes;

4.5. a posição relativa dos planos EAB e FIE;

4.6. a posição relativa dos planos DAB e EIJ.

5 Com papel, constrói uma representação de um paralelepípedo e designa os seus vértices com letras de A a H.
Usando as letras dos vértices, indica:

5.1. dois pares de planos estritamente paralelos;

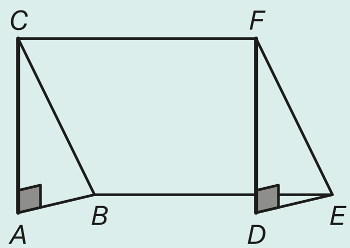
5.2. dois pares de planos perpendiculares;

5.3. duas retas perpendiculares;

5.4. duas retas estritamente paralelas;

5.5. duas retas não complanares.

6 Na figura está representado um esquema de uma baliza de futebol.
Recorrendo ao esquema identifica:



6.1. duas retas paralelas;

6.2. duas retas perpendiculares;

6.3. duas retas não complanares;

6.4. dois planos estritamente paralelos;

6.5. dois planos oblíquos.

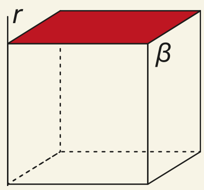
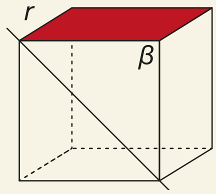
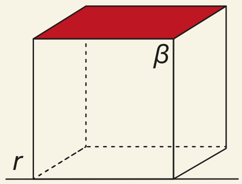
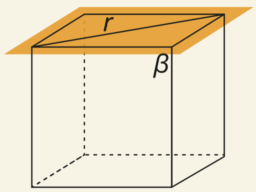
4.1.5. Posição relativa de uma reta relativamente a um plano no espaço euclidiano

Se uma reta r e um plano β tiverem um, e um só, ponto em comum, então r é **secante** (ou concorrente) com o plano β.

Se uma reta r não é secante a um plano α, então r é **paralela** ao plano β.

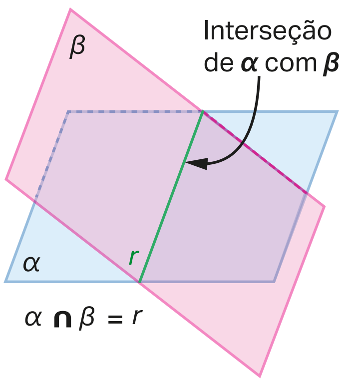
Manual Digital

Vídeo
Posição de uma reta relativamente a um plano

Posição relativa de uma reta relativamente a um plano		
Uma reta é **secante** a um plano se a reta e o plano tiverem um, e um só, ponto em comum.	Uma reta é **perpendicular** a um plano quando o ângulo por eles formado tem amplitude de $90°$.	
	Uma reta é **oblíqua** a um plano quando o ângulo por eles formado não tem amplitude de $90°$.	
Uma reta é **paralela** a um plano se a reta não é secante ao plano.	Uma reta é **estritamente paralela** a um plano se a reta e o plano não têm nenhum ponto em comum.	
	Uma reta está **contida** num plano se todos os pontos da reta fazem parte do plano.	

Interseção de dois planos

A interseção de dois planos α e β não paralelos é uma reta, ou seja, a interseção de dois planos concorrentes é uma reta.



Manual Digital

Vídeo
Critério de paralelismo entre planos

Exercício

7 Na figura seguinte, está representado um sólido que pode ser decomposto no prisma quadrangular reto $[ABCDEFGH]$ e no prisma triangular reto $[EFGHIJ]$.

Usando as letras da figura, indica:

7.1. uma reta perpendicular ao plano EFG;

7.2. uma reta contida no plano EFG;

7.3. uma reta paralela ao plano EFG;

7.4. uma reta oblíqua ao plano ABC;

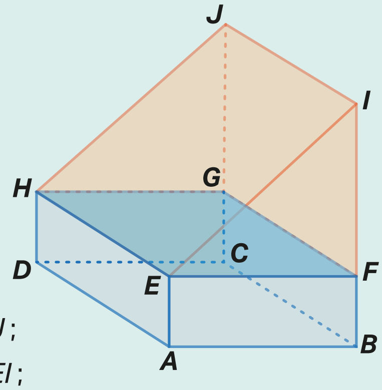
7.5. uma reta oblíqua ao plano EIJ;

7.6. uma reta secante ao plano DCG;

7.7. a posição relativa da reta EF com o plano FIJ;

7.8. a posição relativa da reta AE com o plano HEI;

7.9. a posição relativa da reta BC com o plano EIJ.

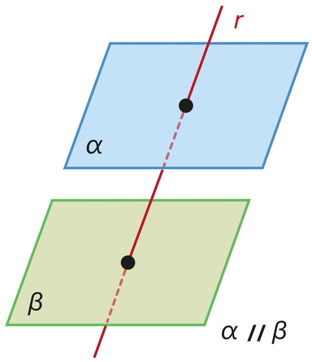


Alguns dos resultados geométricos que utilizamos no nosso dia a dia carecem de prova. De seguida, serão apresentadas propriedades e algumas demonstrações que sustentam as nossas conclusões, em particular para o *paralelismo de retas e planos no espaço euclidiano* e para a *perpendicularidade de retas e planos no espaço euclidiano*.

4.1.6. Paralelismo de retas e planos no espaço euclidiano

Reta secante a dois planos paralelos

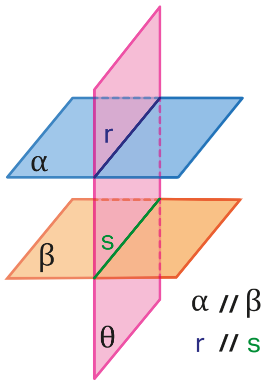
Se uma reta r é secante a um de dois planos paralelos α e β, então a reta é também secante ao outro.



Caraterização do paralelismo de planos através do paralelismo de retas

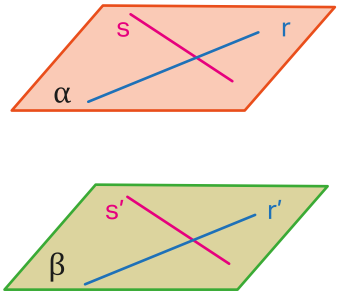
Se um plano θ é concorrente a um de dois planos paralelos α e β, então é também secante ao outro.

Neste caso, as retas de interseção do primeiro com cada um dos outros dois são paralelas.



Planos paralelos

É condição necessária e suficiente para que dois planos (distintos) sejam paralelos que exista um par de retas concorrentes em cada plano, paralelas duas a duas.



Manual Digital

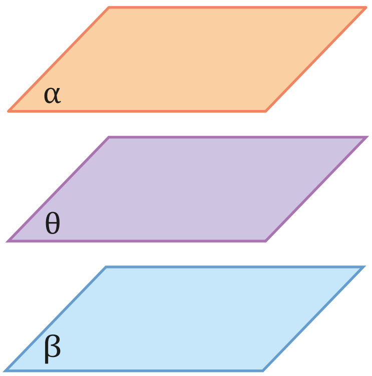
Vídeo
Paralelismo no espaço – planos

Transitividade do paralelismo entre planos

Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos entre si.

Hipótese: α e θ são dois planos paralelos. β e θ são dois planos paralelos.

Tese: α e β são dois planos paralelos.



Demonstração:

Se os planos α e β não fossem paralelos entre si, então intersetar-se-iam e, consequentemente, β intersetaria os planos paralelos a α.

Mas como, por hipótese, β e θ são dois planos paralelos, β não pode intersetar θ.

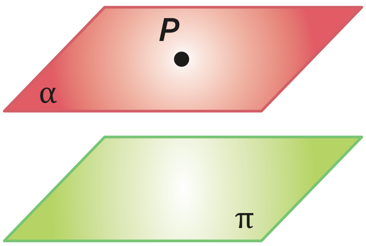
Assim, α e β são dois planos paralelos. ■

Existência e unicidade do plano paralelo a um dado plano contendo um ponto exterior a esse plano

Por um ponto fora de um plano passa um único plano paralelo ao primeiro.

Hipótese: Por um ponto P, exterior a um plano π, passa um plano α paralelo ao plano π.

Tese: O plano α é único.



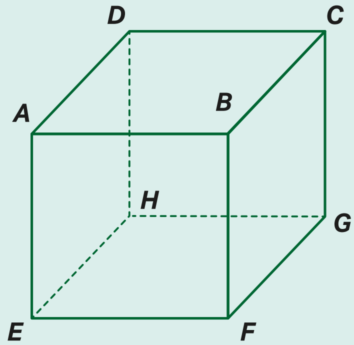
$\pi \mathbin{//} \alpha$
$P \in \alpha$

Demonstração:

Se considerarmos outro plano qualquer que passe por P, o plano é concorrente com o plano α e, consequentemente, concorrente com o plano π. Assim, não pode ser paralelo a π, logo α é o único plano paralelo a π que passa pelo ponto P. ■

Exercícios

8 A figura ao lado representa um cubo.
Recorrendo às propriedades, justifica que:

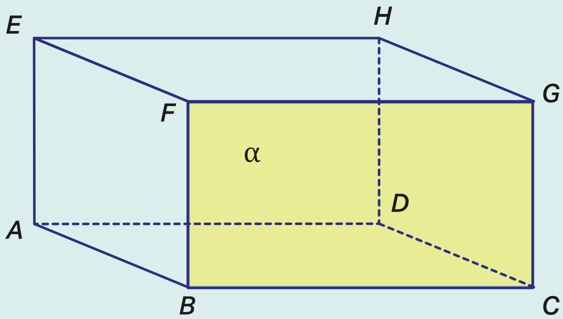


8.1. Os planos ABC e EFG são paralelos.

8.2. Pelo ponto B apenas passa o plano ACB, de modo que o plano seja paralelo ao plano EFG.

8.3. A reta BC é paralela ao plano EFG.

9 A figura seguinte representa um paralelepípedo retângulo.



Para cada uma das seguintes afirmações, indica se são verdadeiras ou falsas. Para as afirmações falsas, recorre ao paralelepípedo retângulo para dar um contraexemplo.

I) Dados dois planos paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro plano.

II) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos entre si.

III) Se um plano é concorrente a um segundo plano, então ele é concorrente a todos os planos concorrentes ao segundo plano.

IV) Se uma reta é secante a um de dois planos estritamente paralelos, então a reta é também secante ao outro.

V) A interseção de um plano com dois planos paralelos origina duas retas não paralelas.

4.1.7. Perpendicularidade de retas e planos no espaço euclidiano

Manual Digital

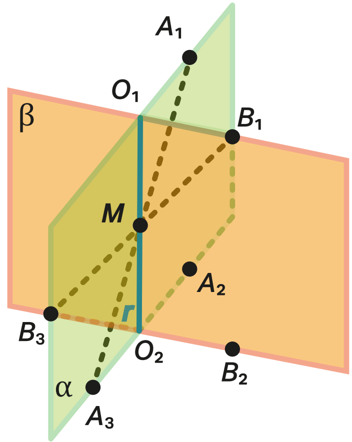
Vídeo
Perpendicularidade entre uma reta e um plano

Ângulo de dois semiplanos com fronteira comum

Sejam α e β dois planos que se intersetam numa reta r.

Considerem-se os ângulos convexos $A_1O_1B_1$ e $A_2O_2B_2$, tais que:

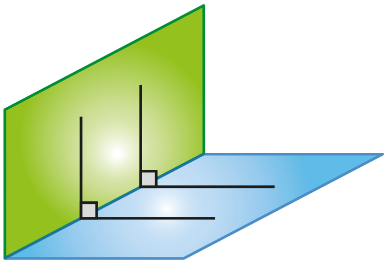
- O_1 e O_2 são pontos de r.
- A_1O_1, A_2O_2, B_1O_1 e B_2O_2 são perpendiculares a r.
- $\dot{O}_1A_1$ e $\dot{O}_2A_2$ estão no mesmo semiplano determinado por r em α.
- $\dot{O}_1B_1$ e $\dot{O}_2B_2$ estão no mesmo semiplano determinado por r em β.



Então, $A_1\widehat{O_1}B_1 = A_2\widehat{O_2}B_2$.

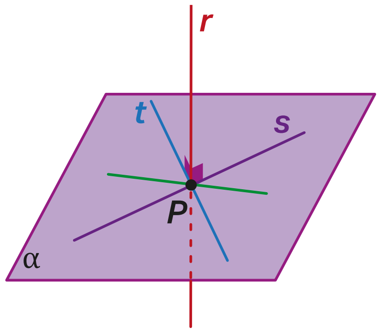
Aos ângulos $A_1O_1B_1$ e $A_2O_2B_2$ chamam-se **ângulos dos semiplanos.**

Quando o ângulo de dois semiplanos tiver amplitude de um ângulo reto, ou seja, $90°$ de amplitude, os semiplanos opostos a estes formam também um ângulo reto. Nesta situação, designam-se os planos--suporte por **planos perpendiculares**.



Retas perpendiculares a planos

> Uma reta r é perpendicular a um plano α num ponto P quando é perpendicular a um par de retas distintas, do plano α, que passam por P.



Ou seja, se duas retas t e s, complanares a um plano α e que passam num ponto P, são perpendiculares a uma reta r, concorrente ao plano α no ponto P, então a reta r é perpendicular ao plano α no ponto P.

Para além disso, se uma reta r é perpendicular a duas retas t e s num mesmo ponto P, é igualmente perpendicular a todas as retas complanares a t e s que passam por P. Também, qualquer reta perpendicular a r que passa por P está contida no plano α determinado pelas retas t e s.

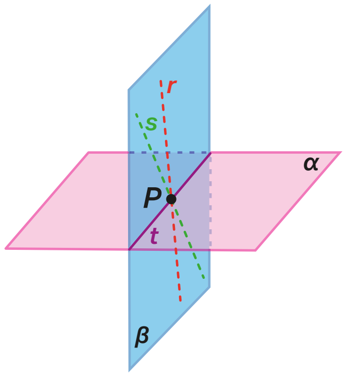
Manual Digital

Vídeos
Critério de perpendicularidade entre planos

Reta normal a um plano

Existência e unicidade de uma reta perpendicular a um plano

Uma reta r, perpendicular a um plano α num ponto P, é única.



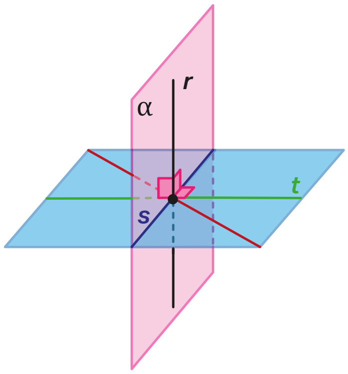
Exercícios

10 Efetua a prova da unicidade de uma reta perpendicular a um plano.
(Sugestão: Começa por supor que existe outra reta, perpendicular a um plano no mesmo ponto).

11 A Luana e o Lucas querem colocar uma vara num canteiro, de modo que a vara ajude uma planta a crescer verticalmente. Explica como devem proceder para que a vara fique perpendicular ao chão.

Planos perpendiculares

É condição necessária e suficiente para que dois planos sejam perpendiculares que um deles contenha uma reta perpendicular ao outro.

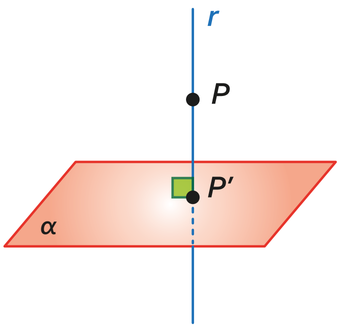


Exercício

12 Efetua a demonstração da propriedade anterior.

Reta normal a um plano

Sendo α um plano e P um ponto exterior ao plano, existe uma única reta r que passa por P e que é perpendicular ao plano α.



O ponto de interseção da reta com o plano, P', é a **projeção ortogonal** de P sobre o plano α e designa-se por **pé da perpendicular**.
A reta r, perpendicular ao plano α, que passa por P', designa-se de **reta normal ao plano** no ponto P'.

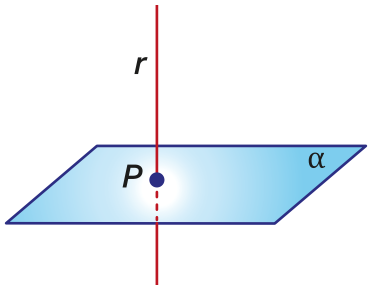
Plano normal a uma reta

Dada uma reta r e um ponto P, existe um único plano α perpendicular a r passando por P.

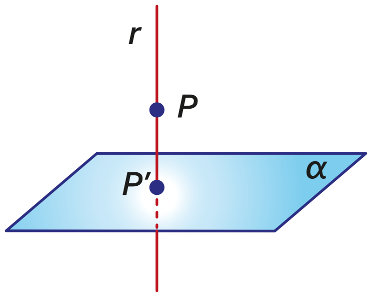
Manual Digital

Vídeo
Plano normal a uma reta

- Se o ponto P pertence ao plano, o plano é o lugar geométrico dos pontos do espaço que determinam com P uma reta perpendicular a r. Neste caso, o plano designa-se por **plano normal a r em P.**



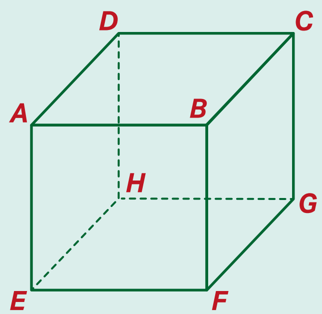
- Se o ponto P não pertence ao plano, o plano é o lugar geométrico dos pontos do espaço que determinam com o ponto P' (pé da perpendicular) uma reta perpendicular a r. Neste caso, o plano designa-se por **plano perpendicular (ou normal) a r passando por P.**



Nota: Um lugar geométrico corresponde a um conjunto de pontos do plano que partilham uma determinada propriedade.

Exercícios

13 A figura ao lado representa um cubo.



13.1. Recorrendo às propriedades, justifica que:

I) Os planos ABC e FGC são perpendiculares.

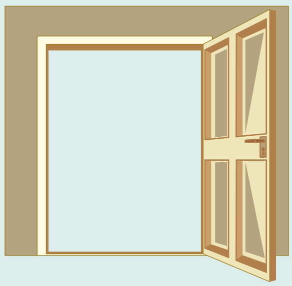
II) A reta DH é a única reta perpendicular ao plano HEF no ponto H.

III) A reta BC é perpendicular ao plano DCG.

13.2. Indica a projeção ortogonal do ponto C no plano EFG.

13.3. Indica a reta normal ao plano ABC que passa por C.

14 **Quando abrimos ou fechamos uma porta, ela passa por várias posições. Justifica por que razão, em todas as posições, a porta permanece perpendicular ao chão.**

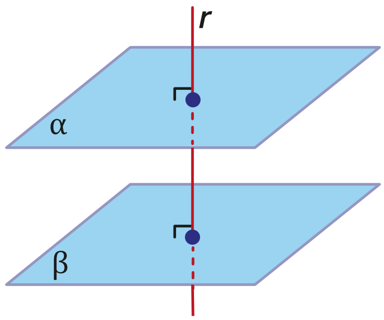


Manual Digital

Vídeo
Reta perpendicular a planos paralelos

Reta perpendicular a planos paralelos

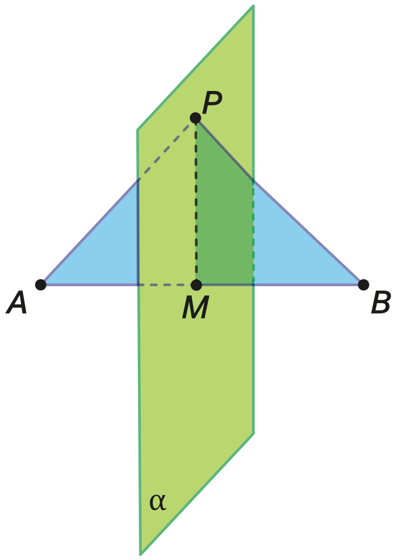
- Se uma reta é perpendicular a um de dois planos paralelos, então a reta é perpendicular ao outro.
- Se dois planos são perpendiculares a uma mesma reta, então os planos são paralelos.



Plano mediador

O **plano mediador** de um segmento de reta $[AB]$ é o plano normal à reta suporte do segmento de reta no respetivo ponto médio do segmento de reta.

O plano mediador é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de A e B.



Exercícios

15 Classifica as seguintes afirmações em verdadeiras ou falsas e corrige as falsas.

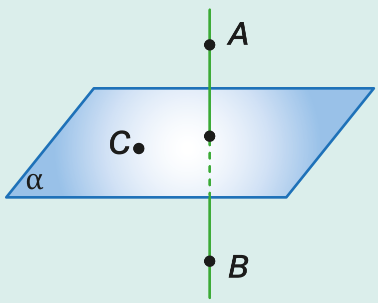
I) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas entre si.

II) As extremidades de um segmento de reta têm a mesma distância de qualquer ponto do plano mediador do segmento de reta.

III) Se um ponto P, pertencente a um plano α, é equidistante dos extremos de um segmento de reta, então o plano α é o plano mediador do segmento de reta.

IV) Se três planos são perpendiculares a uma mesma reta, então os planos são paralelos.

16 Na figura, está representado um segmento de reta $[AB]$ e o seu plano mediador.
O ponto C é um ponto do plano α, exterior à reta AB.
O triângulo $[ABC]$ pode ser escaleno?
Justifica a tua resposta.



Para aplicar

1 **Classifica as seguintes afirmações em verdadeiras ou falsas, corrigindo as afirmações falsas.**

I) Os ângulos correspondentes determinados por uma secante em duas retas paralelas são complementares.

II) A interseção de dois planos é uma reta.

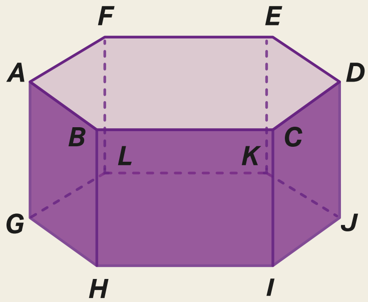
III) Por um ponto exterior a um plano α passa um único plano paralelo a α.

IV) Por um ponto exterior a um plano α passa um único plano perpendicular a α.

V) Por um ponto exterior a um plano passa uma infinidade de retas paralelas a esse plano.

VI) Se duas retas de dois planos distintos são perpendiculares, então os planos são perpendiculares.

2 **Observa o seguinte prisma hexagonal regular.**



2.1. Identifica:

2.1.1. dois planos oblíquos;

2.1.2. duas retas perpendiculares.

2.2. Indica a posição relativa:

2.2.1. das retas AB e DJ;

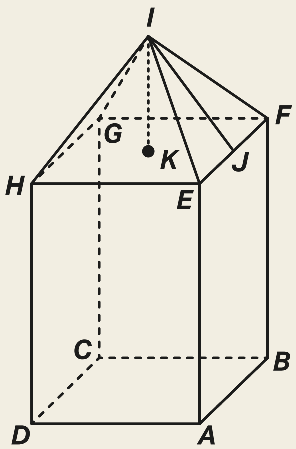
2.2.2. das retas AB e CD;

2.2.3. dos planos LHI e AFL;

2.2.4. da reta BH com o plano IJD.

2.3. Prova que os planos GHI e HIC são perpendiculares.

3 **A seguinte figura é composta por um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ e uma pirâmide quadrangular regular $[EFGHI]$, sendo $[IK]$ a altura da pirâmide e $[IJ]$ a altura do triângulo $[EFI]$.**



3.1. Indica:

3.1.1. uma reta perpendicular ao plano DAE;

3.1.2. um plano perpendicular ao plano HEF;

3.1.3. a interseção dos planos HEI e EFI.

Para aplicar

3.2. Indica a posição relativa dos planos:

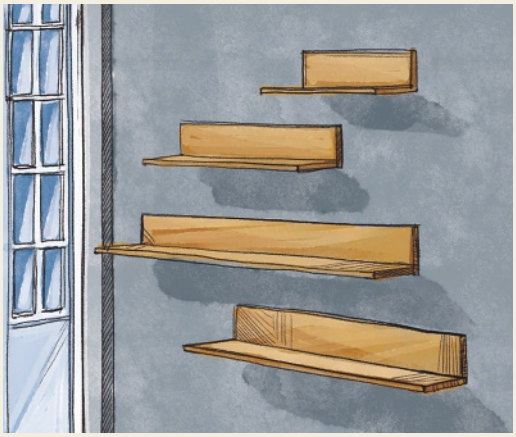
3.2.1. IEF e HDC;

3.2.2. EJI e IFJ.

3.3. Sabendo que K é a projeção ortogonal de I sobre o plano HEF, justifica que a reta IK é perpendicular ao plano DAC.

4 O senhor Joaquim quer colocar uma rede plana, com estacas, no jardim, para evitar que os animais estraguem as flores da senhora Rosa. Como é que o senhor Joaquim deve proceder para ter a certeza de que a rede vai ficar perpendicular ao chão?

5 O pai da Júlia vai comprar um conjunto de estantes para oferecer à Júlia no seu aniversário. Assim, ela poderá guardar no seu quarto os seus livros preferidos. Como é que o pai da Júlia deverá proceder para que as prateleiras fiquem paralelas ao chão?



6 Como podes verificar, existem retas e planos por toda a parte. Individualmente, ou em grupo, encontra exemplos reais de:

- Retas perpendiculares; Retas oblíquas; Retas estritamente paralelas; Retas coincidentes; Retas não complanares; Planos perpendiculares;
- Planos oblíquos; Planos paralelos; Planos coincidentes;
- Uma reta perpendicular a um plano; Uma reta oblíqua a um plano; Uma reta paralela a um plano; Uma reta contida num plano.

4.2. Medida

4.2.1. Distâncias a um plano de pontos, retas paralelas e planos paralelos

Manual Digital

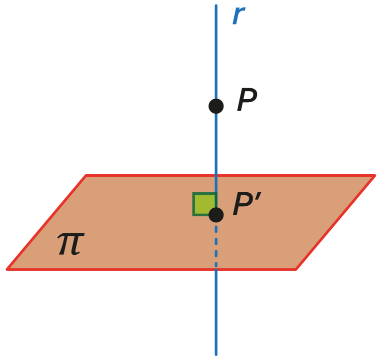
Vídeo
Distância de um ponto a um plano

Distância de um ponto a um plano

A **distância de um ponto P a um plano π** é a distância de P à sua projeção ortogonal em π.

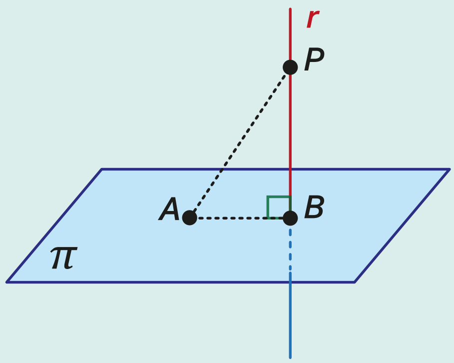
Sendo P' a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano π, a distância de P a π é representada por $\overline{PP'}$.

No caso de o ponto P pertencer ao plano π, a distância de P a π é 0 (zero).



Exercício

17 **Na seguinte figura, a reta r, que contém o ponto P, é perpendicular ao plano π no ponto B.**



17.1. Indica a projeção ortogonal do ponto P no plano π.

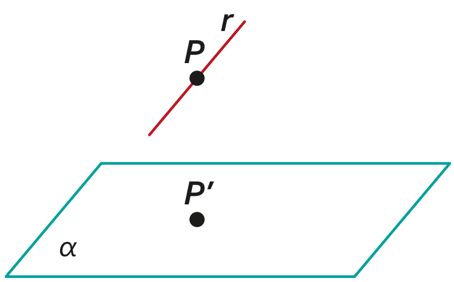
17.2. Qual é a posição relativa da reta r com qualquer reta do plano π que passe pelo ponto B?

17.3. Justifica que a distância do ponto P ao ponto A é maior do que a distância do ponto P ao ponto B, ou seja, que $\overline{PA} > \overline{PB}$.

4.2.2. Projeção ortogonal num plano de uma reta paralela ao plano

Consideremos r, uma reta paralela a um plano α, e P, um ponto da reta r, sendo P' a projeção ortogonal do ponto P no plano α.

O plano π, determinado pelo ponto P' e pela reta r, é perpendicular ao plano α.

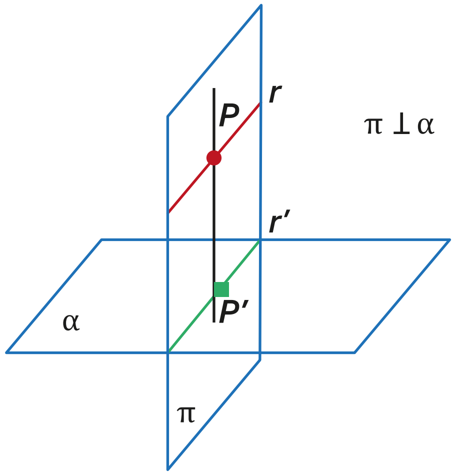


Represente-se por r' a reta correspondente à interseção dos planos π e α.

As retas r' e r são paralelas, uma vez que são complanares no plano π e que não se intersetam.

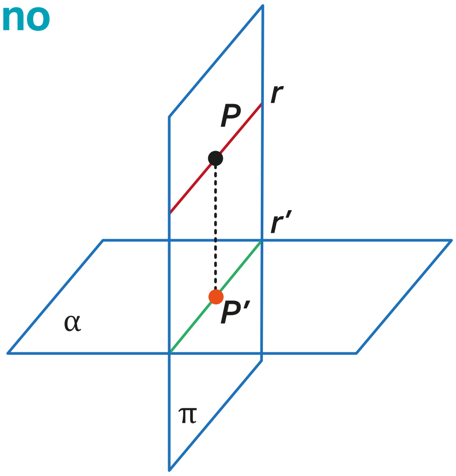
Os pontos da reta r' são os pés das perpendiculares traçadas dos pontos da reta r.

A reta r' designa-se por **projeção ortogonal** da reta r no plano α.



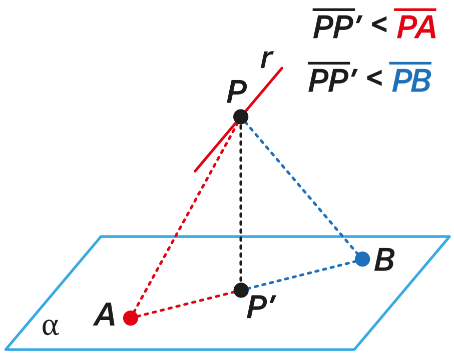
4.2.3. Distância entre a reta e o plano

A **distância entre a reta r e o plano α** é a distância entre as retas paralelas r e r'.



Assim, a distância entre a reta r e o plano α é $\overline{PP'}$.

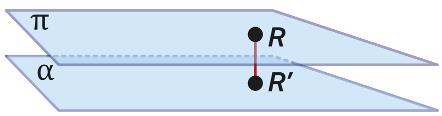
Se considerarmos dois quaisquer pontos A e B, pertencentes ao plano α e distintos da reta r', então: $\overline{PA} > \overline{PP'}$ e $\overline{PB} > \overline{PP'}$.



> **Nota:**
> A distância entre a reta r e o plano α é sempre menor do que a distância entre um ponto da reta r e qualquer ponto do plano α distinto da projeção ortogonal.

4.2.4. Distância entre planos paralelos

Consideremos dois planos paralelos α e π.



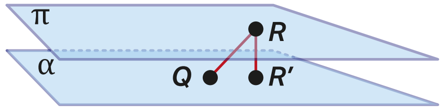
α // π

R é um ponto do plano π e R' é a projeção ortogonal do ponto R no plano α.

A distância de R a R' é igual a qualquer distância de um ponto do plano π à sua projeção ortogonal no plano α.

Esta distância comum é a distância entre os planos paralelos α e π.

A **distância entre dois planos paralelos** é igual à distância entre um ponto de um plano e a sua projeção ortogonal no outro plano.



$\alpha \,//\, \pi$

Se Q é um ponto do plano α, distinto de R', então: $\overline{RQ} > \overline{RR'}$.

A distância entre dois planos paralelos é sempre menor do que a distância entre quaisquer dois pontos, um em cada um dos planos, que não sejam projeção ortogonal um do outro.

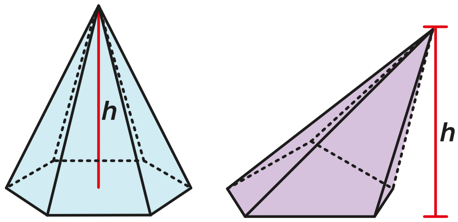
Manual Digital

Vídeo
Volume de uma esfera

Exercício
Relacionar volumes e medidas de sólidos

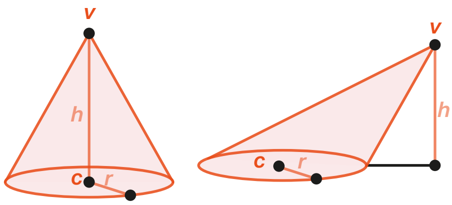
4.2.5. Altura da pirâmide, do cone e do prisma

A altura de uma pirâmide e a altura de um cone podem ser determinadas através da distância de um ponto a um plano.



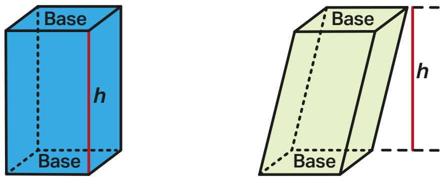
A **altura de uma pirâmide** corresponde à distância do plano que contém a base ao vértice oposto.

A **altura de um cone** corresponde à distância do plano que contém a base ao vértice oposto.



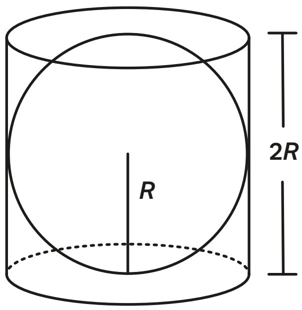
A altura de um prisma pode ser determinada através da distância entre dois planos paralelos.

A **altura de um prisma** corresponde à distância dos planos que contêm as suas bases.



4.2.6. Volumes e áreas das superfícies de sólidos

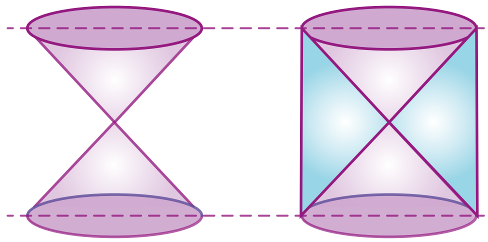
Volume da esfera



Ao longo da História, vários matemáticos dedicaram-se ao cálculo de volumes de sólidos. Arquimedes (287-212 a.C.), um matemático grego, determinou o volume de uma esfera. Para isso, Arquimedes colocou uma esfera de raio R dentro de um cilindro. O raio da base do cilindro era igual ao raio da esfera e a altura do cilindro era igual a duas vezes o raio da esfera. Em seguida, Arquimedes encheu de água a parte do cilindro não ocupada pela esfera. Retirou a esfera e verificou que a água ocupava $\frac{2}{3}$ do volume do cilindro. Deste modo, Arquimedes concluiu que o $V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3}V_{\text{cilindro}}$.

No século XVII, um matemático italiano, Cavalieri, estabeleceu um princípio para o cálculo de volumes. O princípio de Cavalieri mostra que dois sólidos que têm a mesma altura, se sempre que são seccionados por um mesmo plano gerarem áreas iguais, então têm o mesmo volume.

Para deduzir a fórmula do volume da esfera, Cavalieri efetuou uma comparação do volume da esfera com o volume de uma anticlepsidra, que é um sólido geométrico formado por um cilindro equilátero, ou seja, a altura é igual ao diâmetro da base, do qual subtraímos dois cones em que as bases coincidem com as bases do cilindro, conforme a imagem.



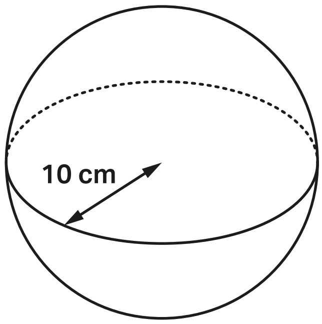
A anticlepsidra é a região representada na imagem a azul. O seu volume é igual ao volume do cilindro subtraído do volume dos dois cones. Como conhecia o volume do cilindro e, sabendo que o volume do cone é 1/3 do volume do cilindro, Cavalieri deduziu o volume da anticlepsidra e, consequentemente, o volume da esfera.

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} = \pi \times r^2 \times (2 \times r) - 2 \times \left(\frac{1}{3}\pi \times r^2 \times r\right) = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Exemplo:

Vamos determinar o volume de uma esfera com raio de 10 cm.

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 10^3 = \frac{4}{3}\pi 1000 = \frac{4000\pi}{3} \text{ cm}^3$$



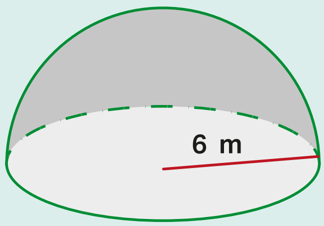
Exercícios

18 O raio de uma bola de basquetebol oficial é de cerca de 15 cm.

Determina o valor, aproximado às centésimas, do volume da bola de basquetebol.

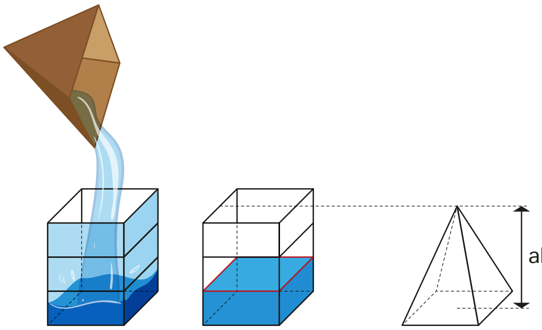
19 O raio da semiesfera representada na figura é de 6 m.

Determina o valor, aproximado às milésimas, do volume da semiesfera.



Volume da pirâmide

Se enchermos um recipiente com a forma de um prisma, recorrendo à medida de um recipiente em forma de pirâmide, com a mesma altura e com a mesma base, necessitamos de três pirâmides para encher o prisma.



Manual Digital

Vídeo
Volume de uma pirâmide triangular

Assim, o volume de uma pirâmide corresponde à terça parte do volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura.

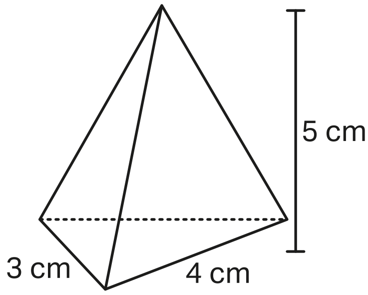
$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3} = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3}$$

Exemplo:

Vamos determinar o volume de uma pirâmide com altura de 5 cm, cuja base é um triângulo retângulo com catetos de 3 cm e 4 cm.

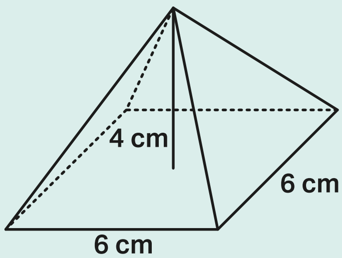
$$A_{\text{base}} = \frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{ cm}^2$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3} = \frac{6 \times 5}{3} = \frac{30}{3} = 10\text{ cm}^3$$

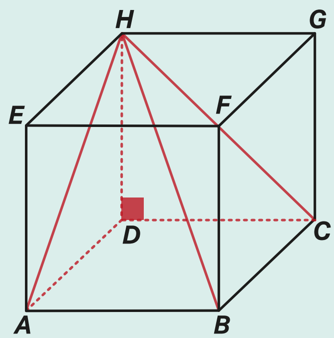


Exercícios

20 Determina o volume da pirâmide de base quadrangular e com 4 cm de altura.



21 Na figura ao lado está o cubo $[ABCDEFGH]$ e a pirâmide $[ABCDH]$.
Sabendo que a medida da aresta do cubo é de 12 cm, determina o volume do cubo e o volume da pirâmide.
Verifica a relação entre os volumes obtidos.



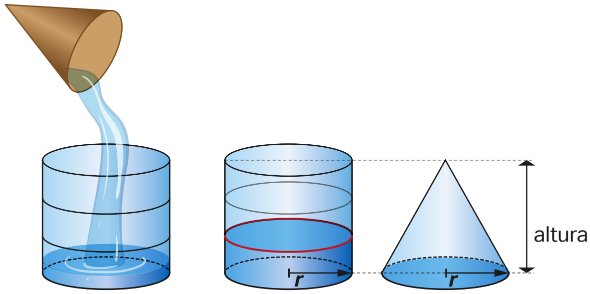
Manual Digital

Vídeo
Volume de um cilindro

Exercício
Calcular áreas e volumes de um cone

Volume do cone

Analogamente, como verificámos para o volume de uma pirâmide, se enchermos um recipiente cilíndrico usando como medida um recipiente cónico, com a mesma altura e com a mesma base, necessitamos de três cones para encher o cilindro.



Assim, o volume de um cone corresponde à terça parte do volume de um cilindro com a mesma base e a mesma altura.

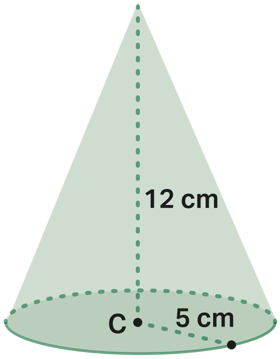
$$V_{\text{cone}} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3} = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3}$$

Exemplo:

Vamos determinar o volume de um cone com altura de 12 cm, cujo raio da base mede 5 cm.

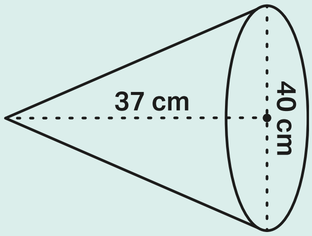
$$A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi 5^2 = 25\pi\text{ cm}^2$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3} = \frac{25\pi \times 12}{3} = \frac{300\,\pi}{3} = 100\pi\text{ cm}^3$$

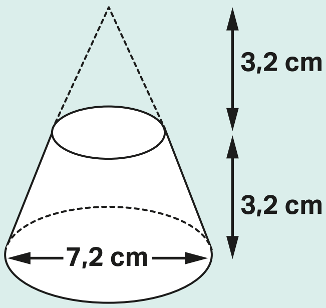


Exercícios

22 Determina o volume de um cone com altura de 37 centímetros, cujo diâmetro da base é de 40 centímetros.
Apresenta o valor aproximado do resultado com duas casas decimais.



23 Na figura ao lado está um cone truncado com $3{,}2\text{ cm}$ de altura e cujo diâmetro da base mede $7{,}2\text{ cm}$.
Determina o volume do cone truncado.

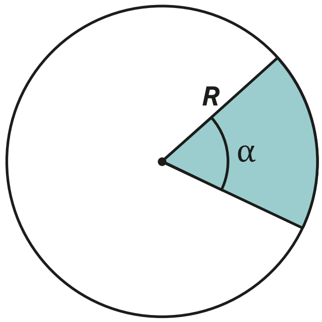


4.2.7. Área da superfície de poliedros, da superfície lateral de cones retos e da superfície esférica

Área de um setor circular

O **setor circular** é uma parte do círculo limitada por dois raios e um arco.

A **área do setor circular** depende da medida do ângulo que o define e do comprimento do raio da circunferência.



Exemplo:

Determina a área do setor circular correspondente à marca de pontapé de canto de um campo de futebol, sabendo que o ângulo que o define tem uma amplitude de $90°$ e que o comprimento do raio é de 1 metro.

De forma genérica, o sector circular definido por um ângulo α, tem área igual a

$$\begin{array}{lcl} 360° & \underline{\qquad\quad} & A_{\text{círculo}} = \pi r^2 \\ \alpha & \underline{\qquad\quad} & A_{\text{setor circular}} \end{array}$$

$$A_{\text{setor circular}} = \frac{\alpha \pi r^2}{360}$$

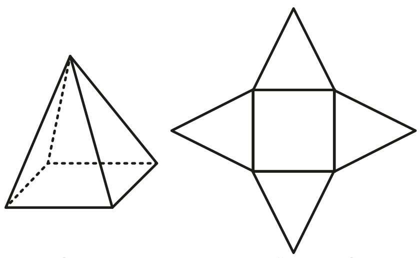
$$A_{\text{setor circular}} = \frac{90 \times \pi \times 1^2}{360} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79 \text{ m}^2$$

Área da superfície de poliedros

A **área da superfície de um poliedro** é a soma das áreas dos polígonos que o formam.

Exemplo:

Na figura seguinte temos uma pirâmide quadrangular, cuja aresta da base mede 6 cm e cuja altura mede 4 cm.

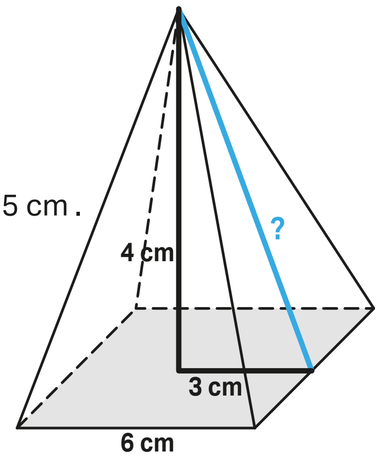


pirâmide *planificação da pirâmide*

Para determinarmos a área da superfície da pirâmide, necessitamos de determinar a área do quadrado (base) e a área dos quatro triângulos (superfície lateral).

$$A_{\text{base}} = 6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$$

Para determinar a altura dos triângulos, que são faces laterais da pirâmide, observa o esquema.



A base do triângulo mede 6 cm.

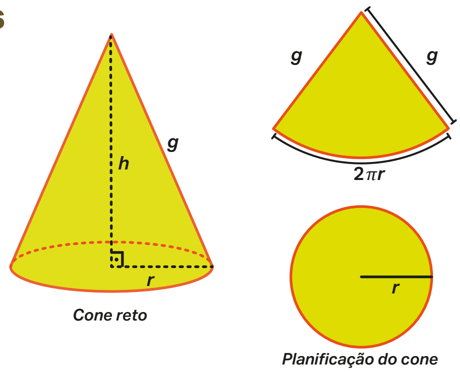
Então, a altura de cada triângulo mede $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ cm.

$A_{\text{superfície lateral}}=4\times A_{\text{triângulo}}=4\times\frac{6\times 5}{2}=60\text{ cm}^2$

$A_{\text{superfície da pirâmide}}=A_{\text{base}}+A_{\text{superfície lateral}}=36+60=96\text{ cm}^2$

Área da superfície lateral de cones retos

A **área da superfície de um cone** corresponde à soma da área da base com a **área da superfície lateral do cone**.



Para determinarmos a área da **superfície lateral do cone,** necessitamos da medida da geratriz.

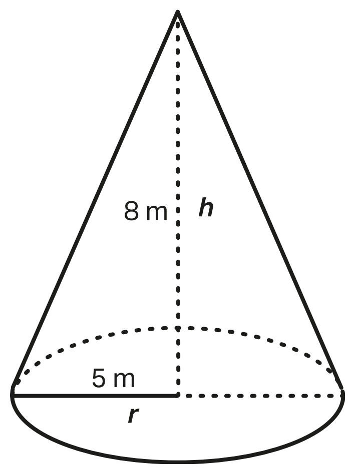
A **geratriz** (g) é um segmento de reta que se inicia num ponto do arco da base e termina no vértice do cone. Para um cone reto, temos a seguinte relação entre o raio (r), a altura (h) e a geratriz (g) do cone: $\boldsymbol{g^2=r^2+h^2}$.

Como a planificação do cone consiste em abrir a lateral do cone, de forma que fique sobre um plano, obtemos uma figura com um raio g e uma parte curva com comprimento $2\pi r$ (igual ao perímetro do círculo, que é a base do cone). Assim:

$$A_{\text{superfície lateral do cone}}=\frac{P_{\text{base}}}{2}\times g=\frac{2\pi r}{2}\times g=\pi rg$$

Exemplo:

Na figura ao lado temos um cone reto, cujo raio da base mede 5 m e cuja altura mede 8 m.



$A_{\text{base}}=\pi\times 5^2=25\pi\text{ m}^2$

Geratriz:

$g^2=r^2+h^2 \Leftrightarrow g^2=5^2+8^2 \Leftrightarrow g=\sqrt{25+64} \Leftrightarrow g=\sqrt{89}$

$A_{\text{superfície lateral do cone}}=\pi rg=\pi\times 5\times\sqrt{89}\text{ m}^2$

$A_{\text{superfície total do cone}}=A_{\text{base}}+A_{\text{superfície lateral}}=$

$=25\pi+\pi\times 5\times\sqrt{89}\approx 226{,}73\text{ m}^2$

Área da superfície esférica

A **superfície esférica** é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão à distância r de um ponto C (o centro da esfera). A área da superfície esférica é igual a $4\pi r^2$.

$$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2$$

Exemplo:

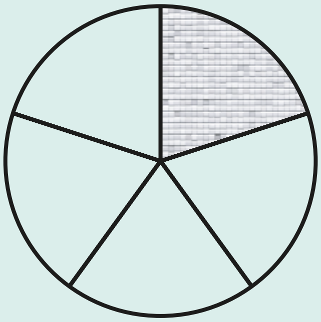
Vamos determinar, com aproximação às décimas, a área da superfície de uma esfera de raio igual a 12 cm.

$$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2 = 4\pi 12^2 = 576\pi \approx 1809{,}6 \text{ cm}^2$$

Exercícios

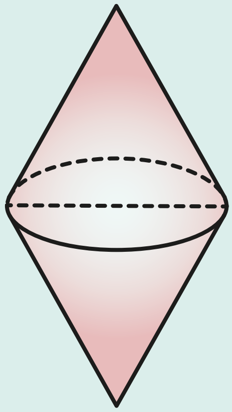
24 Cinco amigas dividiram um círculo em cinco partes iguais. Sabendo que o diâmetro do círculo é de 10 cm, determina a área do setor circular correspondente a cada parte resultante da divisão.

Apresenta o resultado arredondado, com três casas decimais.



25 Na figura está representado um sólido decomponível em dois cones com a mesma base, de diâmetro 24 cm, e com a mesma altura, igual a 20 cm.

Determina o valor exato da área da superfície do sólido.



26 Uma esfera tem de diâmetro 14 cm. Determina a área da superfície esférica.

Apresenta o resultado arredondado às centésimas.

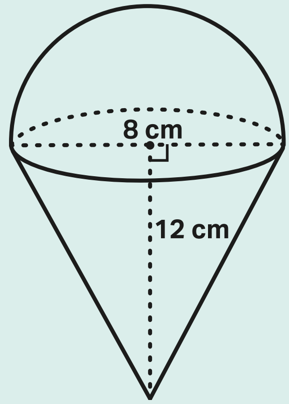
Resolução de problemas

Problemas envolvendo o cálculo de áreas das superfícies e volumes de sólidos

Utiliza os conhecimentos sobre áreas das superfícies e volumes de sólidos para resolver os seguintes problemas.

Exercícios

27 O sólido geométrico apresentado na figura ao lado é composto por uma semiesfera com diâmetro de 8 cm e por um cone reto, de base coincidente com a superfície plana da semiesfera e com altura de 12 cm.



27.1. Determina o volume exato do sólido.

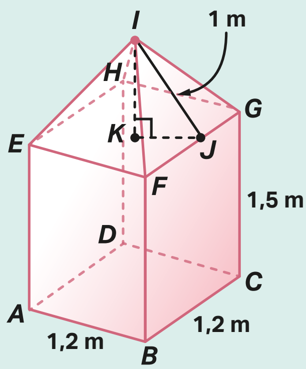
27.2. Determina a área da superfície do sólido. Apresenta o resultado com uma casa decimal.

28 O sólido geométrico apresentado na figura ao lado é composto por um prisma quadrangular $[ABCDEFGH]$ e por uma pirâmide quadrangular $[EFGHI]$, cuja base está assente numa das bases do prisma.

O ponto J é o ponto médio do segmento de reta $[FG]$.

O segmento de reta $[IJ]$ tem de comprimento 1 m.

O comprimento do segmento de reta $[KI]$ corresponde à medida da altura da pirâmide.



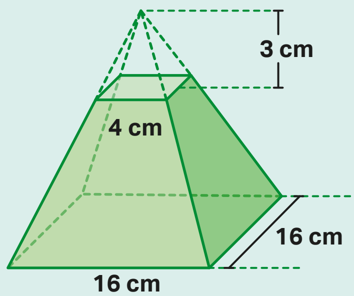
28.1. Determina a altura da pirâmide.

28.2. Determina o volume do sólido.

28.3. Calcula a área da superfície lateral do prisma.

28.4. Calcula a área da superfície lateral da pirâmide.

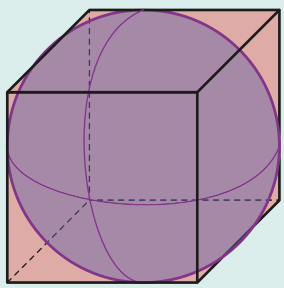
29 Determina o volume, arredondado às unidades, do tronco de pirâmide regular apresentado na figura.



30 Na figura, está representada uma esfera dentro de um cubo.

Sabe-se que a esfera é tangente a todas as faces do cubo nos seus centros.

Sabendo que a aresta do cubo tem de comprimento 20 cm, determina o volume do cubo **não ocupado** pela esfera. Apresenta o resultado arredondado às décimas, em cm^3.



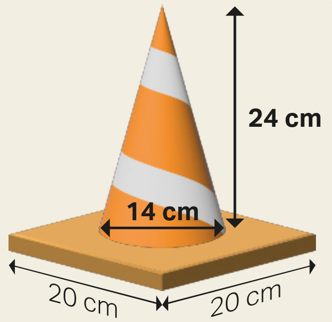
Para aplicar

1 **A figura apresenta um sólido composto por um cone reto assente num prisma quadrangular com altura de $2\ \text{cm}$.**

1.1. Determina o volume do prisma.

1.2. Determina o volume do cone.

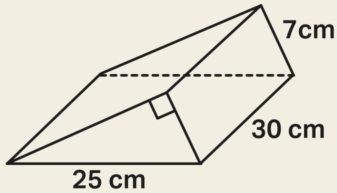
1.3. Calcula a área lateral do cone.



2 **A figura apresenta um prisma triangular.**

2.1. Determina o valor exato do volume do prisma.

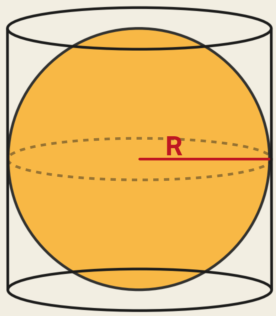
2.2. Calcula a área da superfície lateral do prisma. Apresenta o resultado aproximado às unidades.



3 **Uma esfera com diâmetro de $16\ \text{m}$ está inscrita num cilindro com $16\ \text{m}$ de altura.**

3.1. Determina a área da superfície esférica. Apresenta o resultado arredondado às unidades, em cm^2.

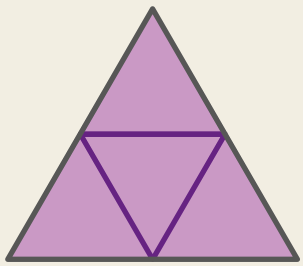
3.2. Qual é o volume exato não ocupado do cilindro?



4 **A figura ao lado corresponde à planificação de uma pirâmide triangular regular, cujas arestas medem $5\ \text{cm}$.**

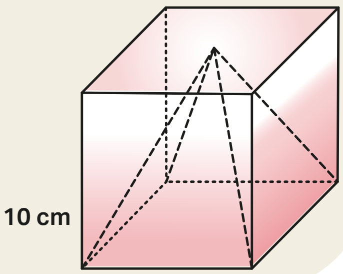
4.1. Calcula a área da superfície da pirâmide.

4.2. Determina o valor exato do volume da pirâmide.



5 **Na figura ao lado, está representado um cubo com aresta de $10\ \text{cm}$ e uma pirâmide quadrangular regular com altura de $10\ \text{cm}$. A base da pirâmide coincide com uma das faces do cubo.**

Mostra que o volume do cubo é três vezes maior do que o volume da pirâmide.



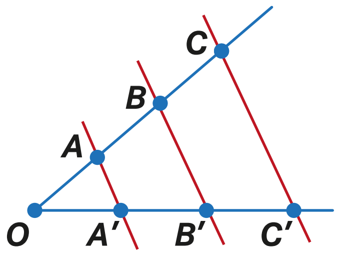
4.3. Trigonometria no triângulo retângulo

Antes de começar

Conta a lenda que o matemático e filósofo grego Tales de Mileto se propôs a calcular a altura da pirâmide de Quéops, medindo o comprimento da sombra da pirâmide no solo e o comprimento da sombra de um bastão de determinada altura. Ele usou um resultado que já havia sido provado nos Elementos de Euclides, usando a proporcionalidade de áreas de triângulos. No entanto, esse resultado ficou conhecido como Teorema de Tales.

Teorema de Tales

Num plano, a interseção de retas paralelas, por retas transversais, formam segmentos proporcionais.



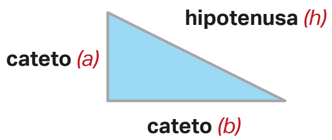
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{B'C}}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CC}}$$

Um outro matemático e filósofo grego famoso é Pitágoras. Pitágoras, juntamente com os elementos da escola que fundou, deu importantes contributos para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Assim, e apesar de se terem descoberto inscrições babilónicas com o enunciado do “seu” teorema, atribui-se a ele um dos mais conhecidos teoremas em geometria, o Teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida do seu lado maior (hipotenusa) é igual à soma dos quadrados das medidas dos seus lados menores (catetos).

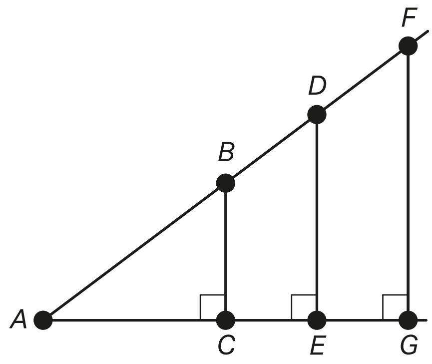


$$h^2 = a^2 + b^2$$

Recorda que, num triângulo retângulo, a hipotenusa corresponde ao lado oposto do ângulo reto e os catetos aos lados que formam esse ângulo reto.

Dois **triângulos** são **semelhantes** quando possuem os três ângulos ordenadamente congruentes (mesma amplitude) e os lados correspondentes proporcionais.

1 **Na figura ao lado, as retas BC, DE e FG são perpendiculares à reta AG.**



1.1. Mostra que $A\hat{B}C = A\hat{D}E$.

1.2. Justifica que os triângulos $[ABC]$, $[ADE]$ e $[AFG]$ são semelhantes.

1.3. Justifica que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$.

1.4. Justifica que $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AF}}$.

1.5. Sabendo que $\overline{AB} = 10$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{DE} = 9$ e $\overline{FG} = 12$.

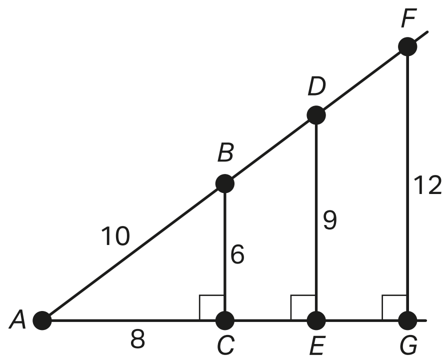
1.5.1. Determina:

a) $\overline{AD}$;

b) $\overline{AF}$;

c) $\overline{AE}$;

d) $\overline{AG}$.



1.5.2. Mostra que $\frac{\overline{AF}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$.

1.5.3. Mostra que $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$.

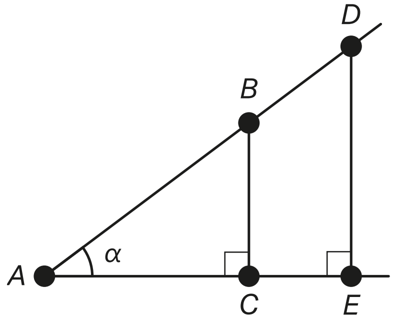
1.5.4. Mostra que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$.

Critério ângulo-ângulo (AA) de semelhança de triângulos:

Para que dois triângulos sejam semelhantes, é suficiente que dois ângulos de um sejam iguais a dois ângulos do outro.

4.3.1. Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

Seno de um ângulo agudo



Na figura, estão representados dois triângulos retângulos.

O ângulo interno α é comum aos triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$.

Nos triângulos retângulos, os lados $[AC]$ e $[AE]$ dizem-se **catetos adjacentes** ao ângulo α e os lados $[CB]$ e $[ED]$ dizem-se **catetos opostos** ao ângulo α.

Pode concluir-se que o triângulo $[ABC]$ e o triângulo $[ADE]$ são semelhantes, pelo critério AA.

Como os triângulos são semelhantes, então os comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos são diretamente proporcionais.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$

Fixada uma unidade de comprimento, conclui-se, a partir da igualdade anterior, que o quociente

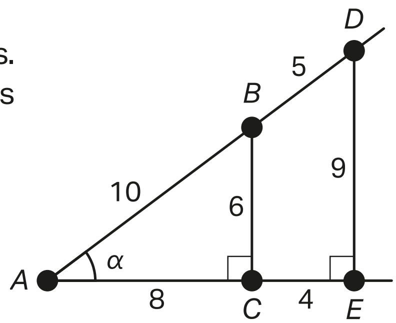
$$\frac{\text{medida do comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}}$$

é igual nos triângulos retângulos $[ABC]$ e $[ADE]$.

O quociente entre a medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo agudo α e a medida do comprimento da hipotenusa é constante em todos os triângulos retângulos.
A este quociente constante chamamos **seno de** $\boldsymbol{\alpha}$ e representámo-lo por $\mathbf{sin}(\alpha)$, $\mathbf{sin}\,\alpha$ ou $\mathbf{sen}\,\alpha$.

$$\mathbf{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida do comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}}$$

Exemplo:



Na figura estão representados dois triângulos retângulos.
O triângulo $[ABC]$ e o triângulo $[ADE]$ são semelhantes pelo critério AA.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\mathbf{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida do comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}} = 0{,}6$$

Manual Digital

Vídeo
Razão trigonométrica: cosseno

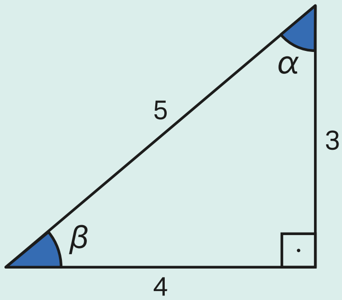
Exercício

31 Considera o triângulo retângulo representado na figura ao lado.

Os comprimentos dos catetos são 4 e 3, e o comprimento da hipotenusa é 5.

31.1. Determina $\operatorname{sen} \beta$;

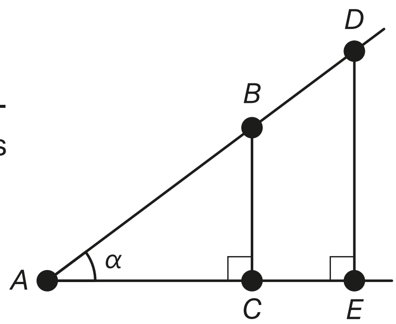
31.2. Determina $\operatorname{sen} \alpha$.



Cosseno de um ângulo agudo

Retomando a mesma figura, na qual já tínhamos concluído a semelhança entre os dois triângulos retângulos $[ABC]$ e $[ADE]$, pode agora concluir-se também que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$$



Fixada uma unidade de comprimento, conclui-se, a partir da igualdade anterior, que o quociente

$$\frac{\text{medida do comprimento do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}}$$

é igual nos triângulos retângulos $[ABC]$ e $[ADE]$.

O quociente entre a medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo agudo α e a medida do comprimento da hipotenusa é constante em todos os triângulos retângulos.
A este quociente constante chamamos **cosseno de** α e representamo-lo por $\cos(\alpha)$ ou $\cos \alpha$.

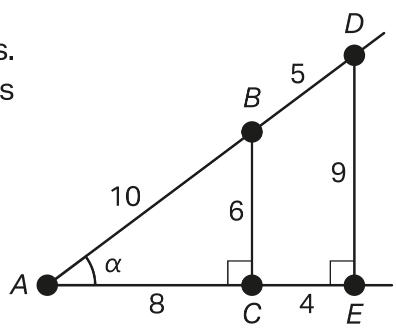
$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do comprimento do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}}$$

Exemplo:

Na figura estão representados dois triângulos retângulos.
O triângulo $[ABC]$ e o triângulo $[ADE]$ são semelhantes pelo critério AA.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \ ;$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$



$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do comprimento do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}} = 0{,}8$$

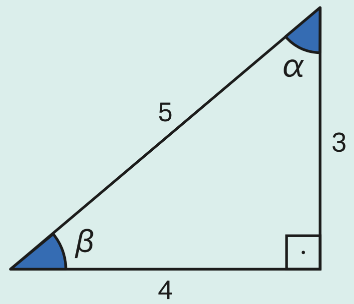
Exercício

32 Considera o triângulo retângulo representado na figura ao lado.

Os comprimentos dos catetos são 4 e 3, e o comprimento da hipotenusa é 5.

32.1. Determina $\cos \beta$;

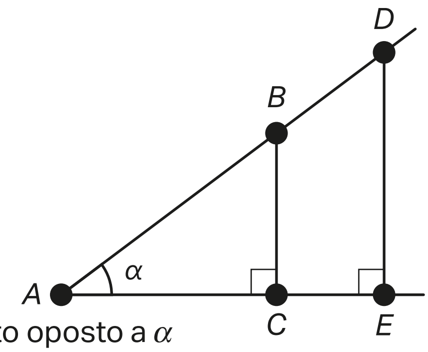
32.2. Determina $\cos \alpha$.



Tangente de um ângulo agudo

Voltando aos triângulos semelhantes $[ABC]$ e $[ADE]$, vejamos agora que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$$



Fixada uma unidade de comprimento, conclui-se, a partir da igualdade anterior, que o quociente

$$\frac{\text{medida do comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do comprimento do cateto adjacente a } \alpha}$$

é igual nos triângulos retângulos $[ABC]$ e $[ADE]$.

O quociente entre a medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo agudo α e a medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo agudo α é constante em todos os triângulos retângulos.

A este quociente constante chamamos **tangente de** α e representamo-lo por $\mathbf{tan}(\alpha)$, $\mathbf{tan}\,\alpha$ ou $\mathbf{tg}\,\alpha$.

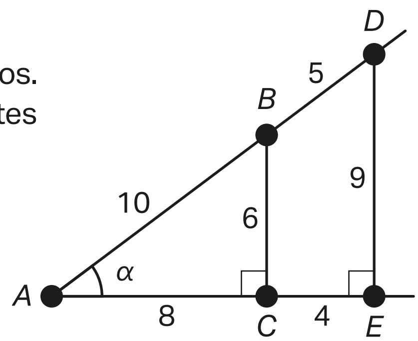
$$\mathbf{tan}\,\alpha = \frac{\text{medida do comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do comprimento do cateto adjacente a } \alpha}$$

Exemplo:

Na figura, estão representados dois triângulos retângulos. O triângulo $[ABC]$ e o triângulo $[ADE]$ são semelhantes pelo critério AA.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$



$$\mathbf{tan}\,\alpha = \frac{\text{medida do comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do comprimento do cateto adjacente a } \alpha} = 0{,}75$$

Manual Digital
Exercício
Calcular razões trigonométricas

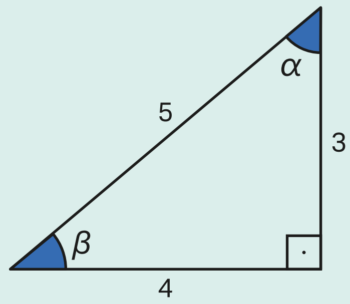
Exercício

33 **Considera o triângulo retângulo representado na figura ao lado.**

Os comprimentos dos catetos são 4 e 3, e o comprimento da hipotenusa é 5.

33.1. Determina $\tan \beta$;

33.2. Determina $\tan \alpha$.



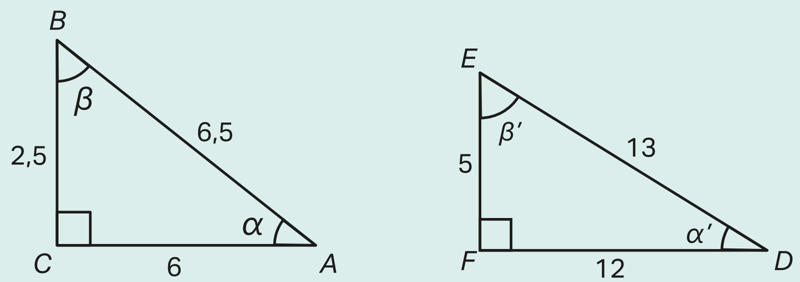
Designamos por **razões trigonométricas** de α o seno de α, o cosseno de α e a tangente de α.

As razões trigonométricas de um ângulo agudo α são:

$$\operatorname{sen} \alpha\,;\ \cos \alpha \ \text{ e } \ \tan \alpha$$

Exercício

34 **Considera os triângulos retângulos semelhantes $[ABC]$ e $[DEF]$.**



34.1. Qual é a relação entre a amplitude do ângulo α e a amplitude do ângulo α'?

34.2. Qual é a relação entre a amplitude do ângulo β e a amplitude do ângulo β'?

34.3. Determina as razões trigonométricas de α e as razões trigonométricas de α'.

O que verificas?

34.4. Determina as razões trigonométricas de β e as razões trigonométricas de β'.

O que verificas?

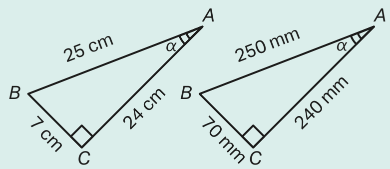
Manual Digital

Vídeo
Ângulos ao centro e setores circulares

Ângulos com a mesma amplitude têm o mesmo seno, cosseno e tangente. Assim, as razões trigonométricas de ângulos com a mesma amplitude são iguais.
O valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo α é independente da unidade de comprimento fixada.

Exercício

35 Considera os triângulos ao lado.
Os triângulos são geometricamente iguais, com unidades de comprimento diferentes.
Determina as razões trigonométricas de α para os dois triângulos. O que verificas?



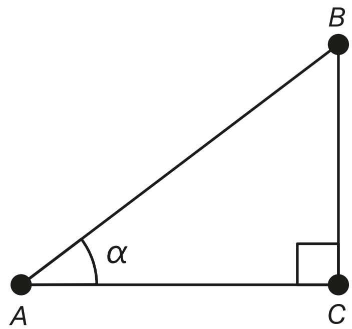
Propriedade:

O seno e o cosseno de um ângulo agudo são números positivos menores do que 1.

Demonstração:

O seno e o cosseno de um ângulo agudo são números positivos menores do que 1.

Considere-se o triângulo retângulo $[ABC]$, sendo α a amplitude de um ângulo agudo do triângulo.



- $\operatorname{sen}\alpha > 0$, porque $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ com $\overline{BC} > 0$ e $\overline{AB} > 0$.
- $\operatorname{sen}\alpha < 1$, porque $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ com $\overline{BC} < \overline{AB}$.
  Então, $0 < \operatorname{sen}\alpha < 1$.
- $\cos\alpha > 0$, porque $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ com $\overline{AC} > 0$ e $\overline{AB} > 0$.
- $\cos\alpha < 1$, porque $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ com $\overline{AC} < \overline{AB}$.
  Então, $0 < \cos\alpha < 1$. ■

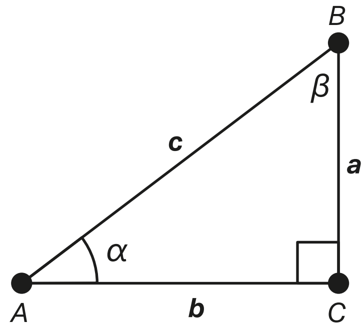
4.3.2. Fórmula fundamental da trigonometria

A soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo agudo α é igual a 1.
Esta resultante designa-se por **fórmula fundamental da trigonometria.**

$$\mathbf{sen}^2\alpha + \mathbf{cos}^2\alpha = 1 \quad \text{ou} \quad (\mathbf{sen}\,\alpha)^2 + (\mathbf{cos}\,\alpha)^2 = 1$$

Demonstração:

Considere-se o triângulo retângulo $[ABC]$, sendo α a amplitude do ângulo CAB. Os comprimentos dos lados do triângulo são representados por a, b e c.



$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c}$, então $\text{sen}^2\,\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}$.

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$, então $\cos^2\alpha = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}$.

* Pelo Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$.

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} \overset{*}{=} \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Então: $\mathbf{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1}$. ■

Manual Digital

Vídeo
Fórmula fundamental da trigonometria

Exercício
Aplicar a fórmula fundamental da Trigonometria

Exercício

36 **Indica quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Corrige as afirmações falsas.**

36.1. $\text{sen}^2\,62° + \cos^2 62° = 1$

36.2. $\text{sen}^2\,40° - 1 = \cos^2 40°$

36.3. $\text{sen}\,40° > 1$

36.4. $\text{sen}^2\,7° = (\text{sen}\,7°)^2$

36.5. $0 \leqslant \cos 81° \leqslant 1$

36.6. $\text{sen}^2\,7° = \text{sen}\,(7°)^2$

A fórmula fundamental da trigonometria permite determinar o valor do seno de um ângulo, conhecendo o seu cosseno, e reciprocamente, sem ser necessário recorrer à calculadora.

Exemplo:

Vamos determinar o valor exato do $\cos\alpha$, sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{6}$ e que α é um ângulo agudo.

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{36} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{36}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{36-25}{36} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{11}{36} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{11}{36}} \vee \cos\alpha = \sqrt{\frac{11}{36}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6} \vee \cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

Como $0 < \cos\alpha < 1$, uma vez que α é um ângulo agudo, então $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Exercícios

37 Sendo α um ângulo agudo, determina o valor exato do $\cos \alpha$ sabendo que $\text{sen}\, \alpha = \frac{1}{2}$.

38 Determina o valor exato de $\text{sen}\, \alpha$ sabendo que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, sendo α um ângulo agudo.

A tangente de um ângulo agudo α é igual à razão entre os respetivos seno e cosseno.

$$\tan \alpha = \frac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha}$$

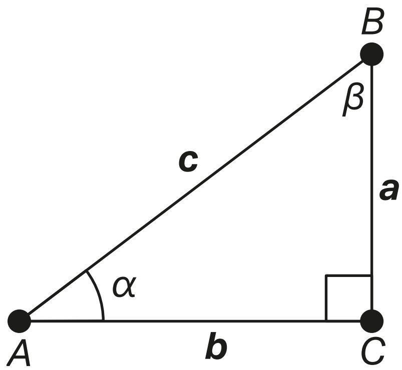
Demonstração:

Considere-se o triângulo retângulo $[ABC]$, sendo α a amplitude do ângulo CAB. Os comprimentos dos lados do triângulo são representados por a, b e c.

Por definição de tangente, tem-se que $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

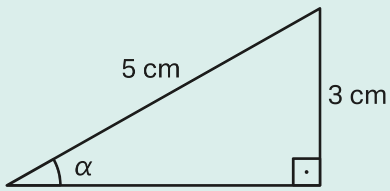
e $\frac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$

então: $\tan \alpha = \frac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha}$. ■

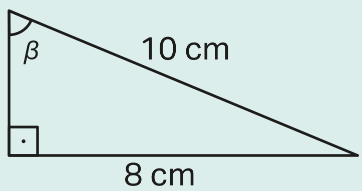


Exercícios

39 Considere-se o triângulo retângulo da figura ao lado, sendo α a amplitude de um ângulo agudo do triângulo. O comprimento da hipotenusa é de 5 cm e o comprimento do cateto oposto ao ângulo α é de 3 cm. Determina as razões trigonométricas de α.

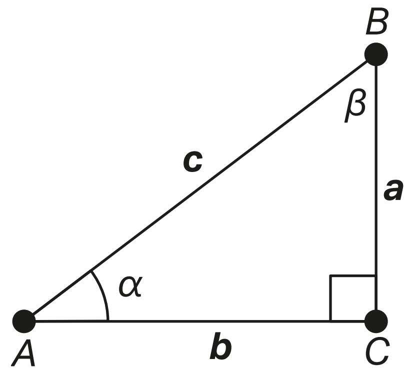


40 Considere-se o triângulo retângulo da figura ao lado, sendo β a amplitude de um ângulo agudo do triângulo. O comprimento da hipotenusa é de 10 cm e o comprimento do cateto oposto ao ângulo β é de 8 cm. Determina as razões trigonométricas de β.



4.3.3. Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares

Considere-se o triângulo retângulo $[ABC]$. Os comprimentos dos lados do triângulo são representados por a, b e c.



Os ângulos agudos α e β são ângulos complementares, porque $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=90°$.

$$\text{sen}\,\alpha=\frac{a}{c} \qquad \text{sen}\,\beta=\frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c} \qquad \cos\beta=\frac{a}{c}$$

Verificamos que $\text{sen}\,\alpha=\cos\beta$ e que $\cos\alpha=\text{sen}\,\beta$.

O seno de um ângulo agudo de amplitude α é igual ao cosseno do seu ângulo complementar, isto é,

$$\text{sen}\,\alpha=\cos(90°-\alpha).$$

O cosseno de um ângulo agudo de amplitude α é igual ao seno do seu ângulo complementar, isto é,

$$\cos\alpha=\text{sen}\,(90°-\alpha).$$

Exercício

41 **Sendo α e β ângulos complementares e sabendo que $\text{sen}\,\alpha=0{,}891$ e $\cos\alpha=0{,}454$, indica quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Corrige as afirmações falsas.**

41.1. $\cos\beta=0{,}891$

41.2. $\text{sen}\,\beta=0{,}891$

41.3. $\cos(90°-\alpha)=0{,}891$

41.4. $\text{sen}(90°-\alpha)=0{,}454$

41.5. $\cos^2\beta+\text{sen}^2\,\alpha=1$

41.6. $\cos^2\beta+\cos^2\alpha=1$

41.7. $\cos^2\beta=1-\text{sen}^2\,\alpha$

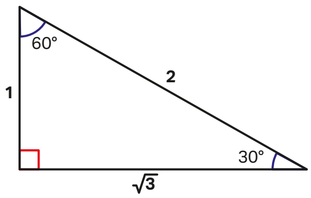
Manual Digital

Vídeo
Razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º

4.3.4. Dedução dos valores das razões trigonométricas dos ângulos de amplitudes $45°$, $30°$ e $60°$

Razões trigonométricas dos ângulos de amplitudes $30°$ e $60°$

Consideremos o triângulo retângulo representado na figura ao lado.

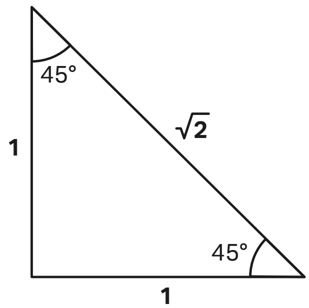


As razões trigonométricas de um ângulo de $30°$ são:	As razões trigonométricas de um ângulo de $60°$ são:
$\text{sen } 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\cancel{1}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{1}} = \frac{1}{2}$	$\text{sen } 60° = \frac{\frac{1\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\cancel{1}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 30° = \frac{\frac{1\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\cancel{1}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\cancel{1}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{1}} = \frac{1}{2}$
$\tan 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{1}.\cancel{2}}{\cancel{2}.\cancel{1}.\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 60° = \frac{\frac{1\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\cancel{1}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{1}} = \sqrt{3}$

Razões trigonométricas do ângulo de amplitude $45°$

Consideremos o triângulo retângulo representado na figura abaixo.

As razões trigonométricas de um ângulo de $45°$ são:
$\text{sen } 45° = \frac{1}{1\sqrt{2}} = \frac{\cancel{1}.1}{\cancel{1}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos 45° = \frac{1}{1\sqrt{2}} = \frac{\cancel{1}.1}{\cancel{1}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan 45° = \frac{\cancel{1}}{\cancel{1}} = 1$



Valores exatos das razões trigonométricas dos ângulos de amplitudes $45°$, $30°$ e $60°$

	$30°$	$45°$	$60°$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

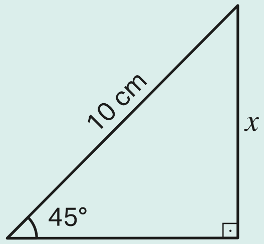
Manual Digital

Exercício
Calcular a inclinação de uma rampa usando razões trigonométricas

Exercícios

42 Considera o triângulo retângulo representado na figura ao lado.

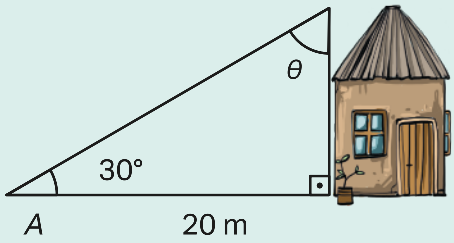
Determina o comprimento x.



43 A distância de um ponto A a uma casa é de 20 m, conforme se representa na figura.

43.1. Indica a amplitude de θ.

43.2. Determina a altura da casa.



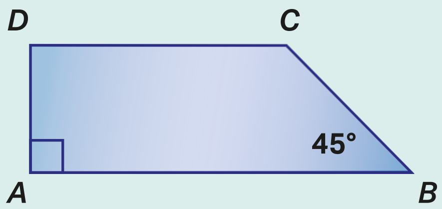
44 Considera o trapézio retângulo $[ABCD]$ representado na figura.

Sabendo que: $\overline{DC} = 12$ m e $\overline{AD} = 6$ m, determina:

44.1. $\overline{AB}$;

44.2. $\overline{CB}$;

44.3. a área do trapézio.



4.3.5. Utilização de tabela para a determinação das razões trigonométricas de um ângulo

Podemos obter valores exatos e aproximados das razões trigonométricas de um ângulo agudo, medindo os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

Para obtermos valores aproximados de razões trigonométricas, temos outros processos práticos. Podemos obter valores aproximados das razões trigonométricas através da utilização de máquina de calcular ou de uma tabela trigonométrica (existente nas últimas páginas do manual).

A utilização da tabela trigonométrica para amplitudes de valores naturais é fácil e prática.

Observando a tabela ao lado, que representa parte de uma tabela trigonométrica, podemos dizer que:

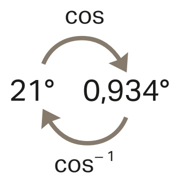
$$\sin 58^\circ = 0{,}8480$$

Graus	Seno	Cosseno	Tangente
55	0,8192	0,5736	1,4281
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	$\boxed{0{,}8480}$	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	0,8660	0,5000	1,7321

Exercício

45 Utilizando a tabela trigonométrica que encontras no final do livro, indica:

45.1. $\cos 58°$	**45.2.** $\cos 61°$	**45.3.** $\text{sen } 58°$	**45.4.** $\tan 4°$
45.5. $\cos 10°$	**45.6.** $\text{sen } 3°$	**45.7.** $\tan 14°$	**45.8.** $\text{sen } 14°$
45.9. $\cos 14°$	**45.10.** $\cos 45°$	**45.11.** $\text{sen } 60°$	**45.12.** $\tan 30°$



A utilização da tabela trigonométrica também é possível para identificar amplitudes de ângulos, conhecendo o valor de uma razão trigonométrica.

Se $\cos \alpha = 0{,}934$, qual será o valor de α?

Na tabela trigonométrica, na coluna do cosseno, procuramos o valor $0{,}934$ ou um valor mais próximo.

Encontramos $0{,}9336$, logo

$$\cos \alpha = 0{,}934 \iff \alpha \approx 21°$$

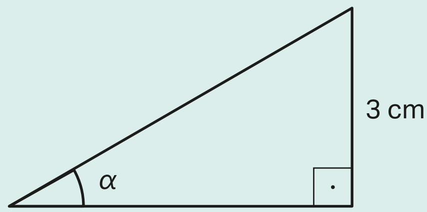
Graus	Seno	Cosseno	Tangente
20	0,3420	0,9397	0,3640
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	0,4226	0,9063	0,4663

Exercícios

46 Utilizando a tabela trigonométrica, determina o valor de α, sabendo que:

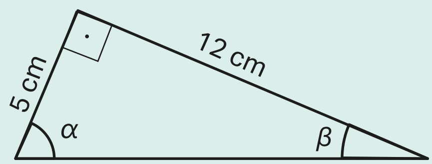
46.1. $\cos \alpha = 0{,}940$	**46.2.** $\text{sen } \alpha = 0{,}766$	**46.3.** $\text{sen } \alpha = 0{,}995$
46.4. $\tan \alpha = 0{,}268$	**46.5.** $\tan \alpha = 1$	**46.6.** $\cos \alpha = 0{,}191$
46.7. $\tan \alpha = 3{,}487$	**46.8.** $\text{sen } \alpha = 0{,}719$	

47 Determina o comprimento da hipotenusa do triângulo ao lado, sabendo que $\alpha = 28°$ e que o comprimento do cateto oposto a α é de 3 cm.



48 Determina as amplitudes dos ângulos α e β, considerando os comprimentos dos catetos apresentados no triângulo.

Apresenta os resultados aproximados às unidades.



4.3.6. Utilização da máquina de calcular para a determinação das razões trigonométricas de um ângulo

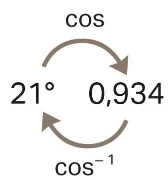
À semelhança da tabela trigonométrica, a máquina de calcular é um instrumento útil para determinarmos valores aproximados de razões trigonométricas ou para, conhecendo o valor de uma razão trigonométrica, determinar o valor aproximado da amplitude de um ângulo agudo. As teclas da máquina de calcular $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ e $\boxed{\tan}$ permitem determinar, respetivamente, o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo.

Exercício

49 **Utilizando a máquina de calcular, com aproximação às centésimas, determina:**

49.1. cos 28°
49.2. sen 61°
49.3. sen 18°
49.4. tan 40°
49.5. cos 1°
49.6. sen 3°
49.7. tan 11°
49.8. cos 14°
49.9. tan 14°
49.10. cos 45°
49.11. sen 60°
49.12. tan 30°

Também à semelhança da tabela trigonométrica, a máquina de calcular permite determinar a amplitudes de ângulos, conhecendo o valor de uma razão trigonométrica. As teclas $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ e $\boxed{\tan^{-1}}$ permitem determinar, respetivamente, o inverso do seno, o inverso do cosseno e o inverso da tangente de um ângulo.



Exercício

50 **Utilizando a máquina de calcular, determina o valor de θ aproximado às décimas, sabendo que:**

50.1. $\cos\theta = 0{,}9$
50.2. $\text{sen}\,\theta = 0{,}31$
50.3. $\text{sen}\,\theta = 0{,}995$
50.4. $\tan\theta = 0{,}268$
50.5. $\tan\theta = 1{,}8$
50.6. $\cos\theta = 0{,}756$
50.7. $\text{sen}\,\theta = 0{,}07$
50.8. $\cos\theta = 0{,}989$

Manual Digital

Exercício
Calcular alturas de árvores com um quadrante usando razões trigonométricas

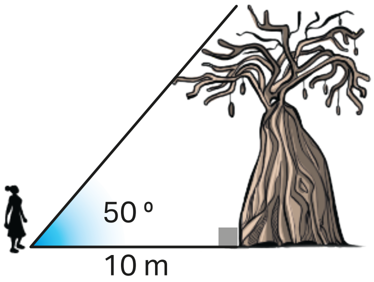
Problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas

As razões trigonométricas possuem diversas aplicações. Assim, conhecendo os valores do seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo, podemos fazer diversos cálculos geométricos. É comum utilizarem-se as razões trigonométricas na resolução de problemas que envolvem distâncias, em particular para determinar distâncias a pontos inacessíveis.

Problema resolvido 1

A Patrícia está a 10 metros de distância de uma árvore. A amplitude do ângulo entre a linha do chão e direção do topo da árvore é de $50°$, como indica a figura.

Determina a altura da árvore e apresenta o resultado em metros, arredondado com apenas uma casa decimal.



Resolução:

A situação pode ser representada esquematicamente através de um triângulo retângulo.

Conhecemos um dos ângulos agudos o seu cateto adjacente e necessitamos de determinar o cateto oposto $(c.o.)$.

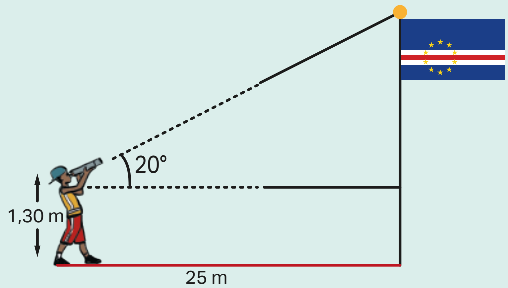
Assim,

$$\operatorname{tg} 50° = \frac{c.o.}{10} \Leftrightarrow 1{,}1918 = \frac{c.o.}{10} \Leftrightarrow 1{,}1918 \times 10 = c.o. \Leftrightarrow c.o. = 11{,}918 \text{ m}$$

A árvore mede aproximadamente $11{,}9$ m.

Exercício

51 O Francisco quer aplicar os conhecimentos de trigonometria que aprendeu em matemática. Ele quer medir a altura do mastro da bandeira de Cabo Verde da sua escola. Para isso, ele construiu um teodolito caseiro (medidor de ângulos) e procedeu como está ilustrado na figura.



Com os dados recolhidos pelo Francisco, determina, com uma aproximação às décimas, a altura do mastro da bandeira.

Para aplicar

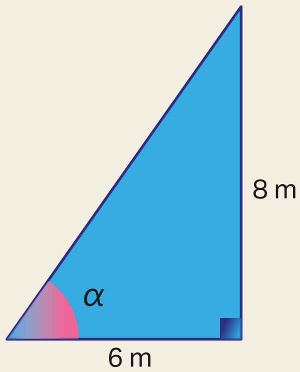
1 A figura apresenta um triângulo retângulo.

1.1. Determina α.

Apresenta o resultado em graus, arredondado às décimas.

1.2. Sem utilizar o Teorema de Pitágoras, determina o comprimento da hipotenusa.

Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.

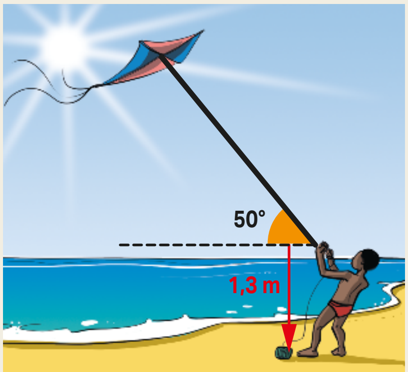


2 Sabe-se que θ é um ângulo agudo e que $\cos\theta = 0{,}6$. Determina $\text{sen}\,\theta$ e $\tan\theta$.

3 Partindo da fórmula fundamental da trigonometria, mostra que: $1 + \tan^2\beta = \dfrac{1}{\cos^2\beta}$.

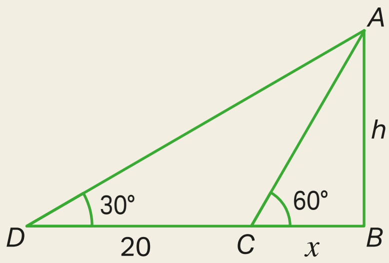
4 O António lançou o seu papagaio na praia de Santa Maria. Quando utilizou os 40 metros de linha, obteve uma inclinação de 50° da linha em relação ao solo. A que altura se encontrava o papagaio nesse momento?

Apresenta o resultado em metros, arredondado às centésimas.



5 Na figura, estão representados os triângulos retângulos $[DBA]$ e $[CBA]$.

Sabendo que $\overline{DC} = 20$, determina os valores exatos de $\overline{CB}$ e $\overline{AB}$.



4.4. Circunferência

Antes de começar

1 **Com a ajuda de um compasso, traça uma circunferência de centro O.**

1.1. Traça um segmento de reta que una o centro a um ponto da circunferência. Como se designa esse segmento de reta?

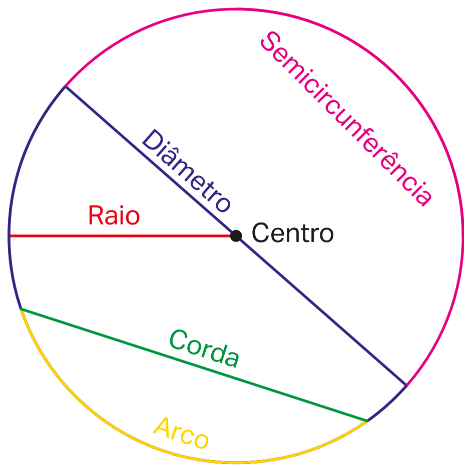
1.2. Traça um segmento de reta que una dois pontos da circunferência e que passe pelo centro. Como se designa esse segmento de reta?

Uma **circunferência** é o conjunto de todos os pontos do plano equidistantes de um ponto designado **centro da circunferência.**

A distância entre o centro da circunferência e um ponto qualquer da circunferência designa-se de **raio da circunferência**.

Uma **corda** é um segmento de reta que une dois pontos da circunferência.

Um **arco** de circunferência é uma parte da circunferência dividida por dois pontos.



O **diâmetro** de uma circunferência corresponde ao comprimento de uma corda que passe no centro da circunferência. O comprimento do diâmetro é duas vezes o comprimento do raio da circunferência.

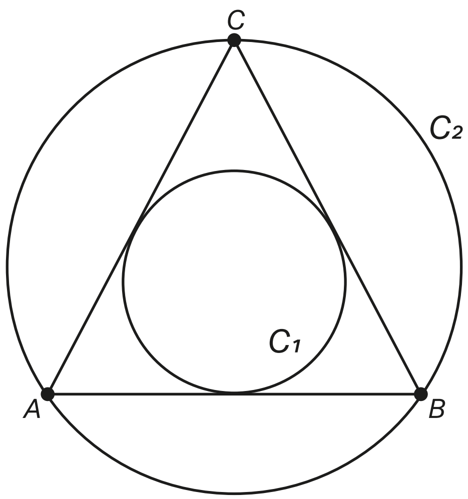
2 **Observa a figura.**

Os vértices do triângulo $[ABC]$ são pontos comuns à circunferência C_2.

Os lados do triângulo $[ABC]$ são tangentes à circunferência C_1.

2.1. Qual é a posição relativa do triângulo $[ABC]$ à circunferência C_1?

2.2. Qual é a posição relativa do triângulo $[ABC]$ à circunferência C_2?

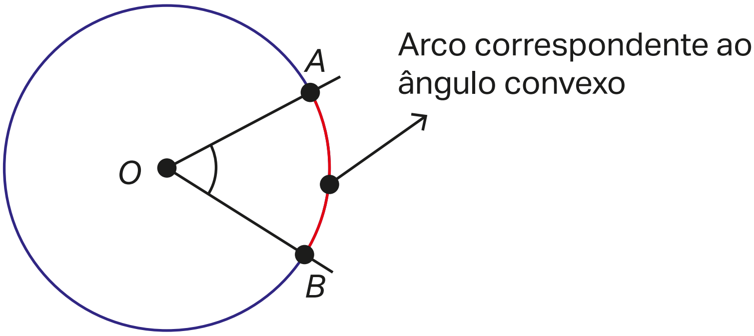


Um **círculo** é o conjunto de pontos formado por uma circunferência e pelos seus pontos internos.

4.4.1. Ângulos numa circunferência

Ângulos ao centro

Como indicado na figura, o ângulo BOA tem o vértice no centro da circunferência.



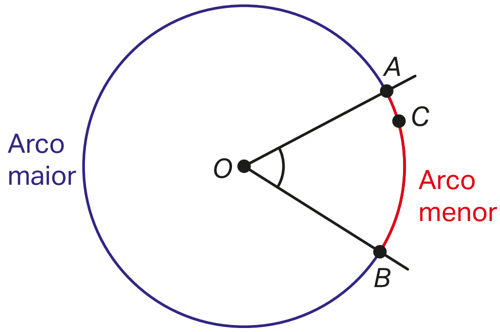
A e B são pontos da circunferência.

O ângulo BOA é um **ângulo ao centro** da circunferência de centro O.

Ao ângulo ao centro BOA corresponde o **arco de circunferência** BA.

A e B são os extremos do arco BA.

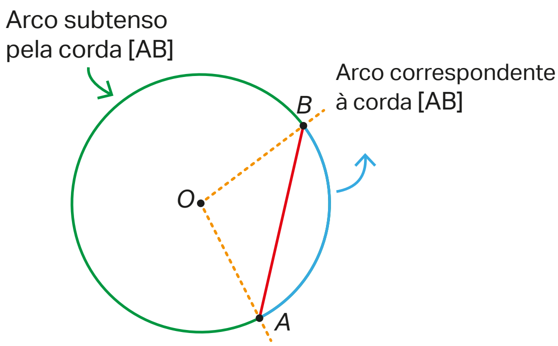
Quando A e B são extremos de um arco de circunferência de centro O, não diametralmente opostos, o arco é determinado na circunferência pelo ângulo ao centro convexo BOA. O arco de circunferência designa-se por **arco menor** BA ou simplesmente arco BA.



No caso do arco ser determinado na circunferência pelo ângulo ao centro côncavo AOB, o arco de circunferência designa-se por **arco maior** AB.

Quando C é também um ponto da circunferência, designa-se por arco BCA o arco de extremos B e A que contém o ponto C.

A **corda** $[AB]$ corresponde ao segmento de reta $[AB]$, em que A e B são pontos de uma circunferência.



À corda $[AB]$ estão associados dois arcos de extremos A e B designados por **arcos subtensos** pela corda $[AB]$. O **arco correspondente** à corda $[AB]$ é o arco menor $[AB]$.

Manual Digital

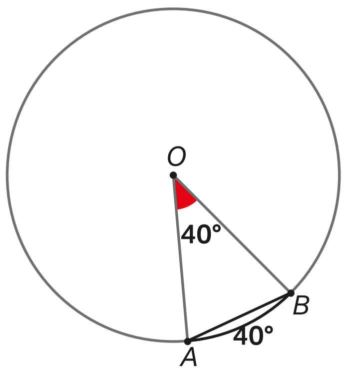
Vídeo
Relação entre cordas e arcos

Manual Digital

Vídeo
Arcos e cordas determinados por duas retas paralelas

Propriedades:

A – A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

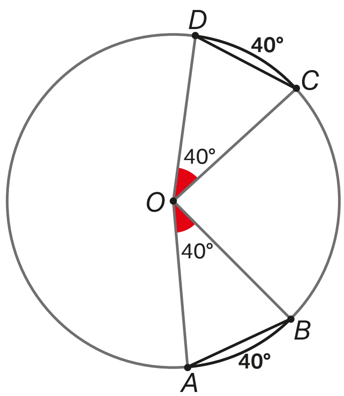


Exemplo:

Na figura ao lado, a amplitude do ângulo ao centro AOB, $40°$, é igual à amplitude do arco AB, $40°$.

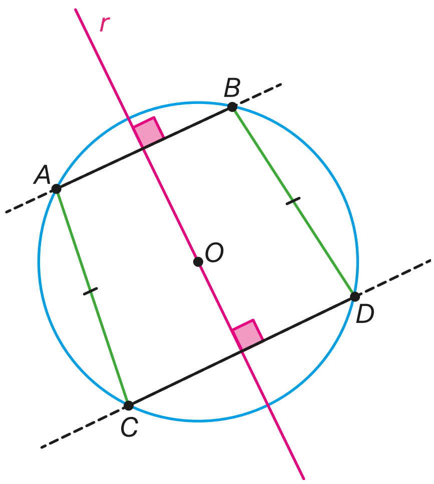
B – Numa circunferência, os arcos determinados por dois ângulos ao centro com a mesma amplitude são geometricamente iguais.

C – Numa circunferência, as cordas determinadas por dois ângulos ao centro com a mesma amplitude são geometricamente iguais.



D – Arcos compreendidos entre retas paralelas secantes à circunferência têm a mesma amplitude.

E – Cordas compreendidas entre retas paralelas secantes à circunferência são geometricamente iguais.

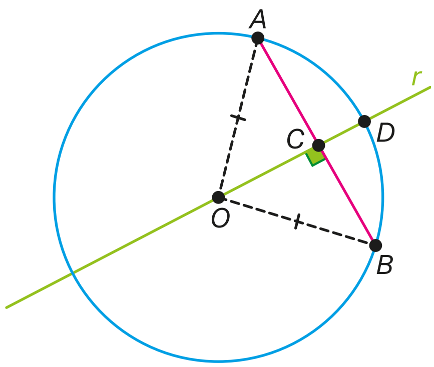


Exemplo:

Na figura ao lado:

- O arco AC e o arco DB são iguais.
- A corda $[AC]$ e a corda $[BD]$ são iguais.
- Os arcos AC e DB têm a mesma amplitude.
- As cordas $[AC]$ e $[BD]$ são geometricamente iguais.

F – Qualquer reta que passe pelo centro de uma circunferência é perpendicular a uma corda que bisseta, assim como aos arcos subtensos e aos ângulos ao centro correspondentes.



Exercícios

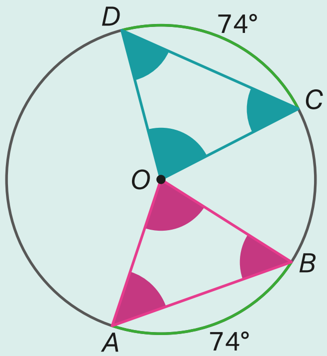
52 Considera a circunferência de centro O representada na figura.

Os pontos A, B, C e D são pontos da circunferência.

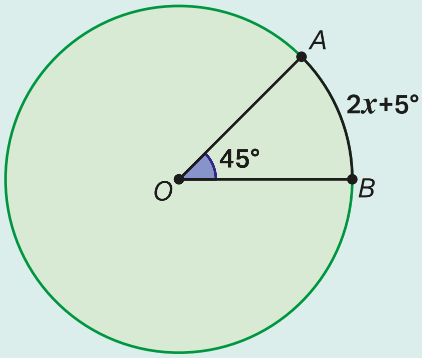
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = 74°$.

52.1. Indica a amplitude do ângulo BAO.

52.2. Os triângulos $[BOA]$ e $[DOC]$ são geometricamente iguais? Justifica.



53 Considera a circunferência de centro O representada na figura.



Os pontos A e B são pontos da circunferência.

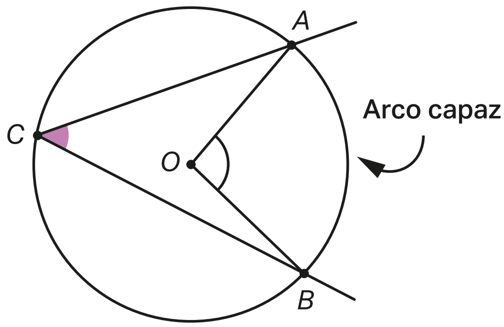
Sabendo que $\overset{\frown}{BA} = 2x + 5°$, determina x.

Ângulos inscritos

O ângulo BCA tem vértice C na circunferência e os lados são as semiretas que contêm as cordas $[CA]$ e $[CB]$. O ângulo BCA é um **ângulo inscrito** na circunferência de centro O.

O arco compreendido entre os lados do ângulo designa-se como **arco capaz** do ângulo inscrito.

O ângulo BOA é o ângulo ao centro correspondente ao ângulo inscrito BCA.

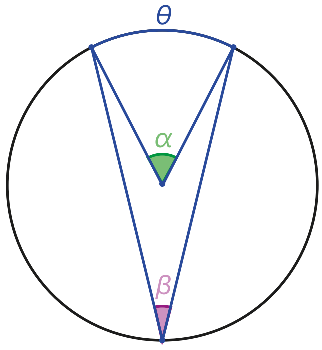


Manual Digital

Vídeos
Ângulo inscrito num arco de circunferência

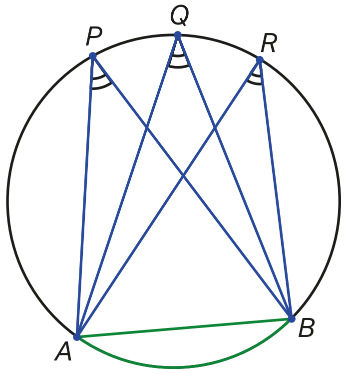
Amplitude de um ângulo inscrito num arco de circunferência

A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco capaz correspondente. Ou seja, a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do seu ângulo ao centro correspondente.



Do resultado anterior, conclui-se o seguinte:

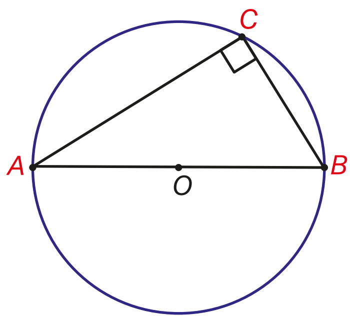
Ângulos inscritos com o mesmo arco capaz têm a mesma amplitude.



Demonstração:

Os ângulos APB, AQB e ARB são ângulos inscritos com o mesmo arco capaz, AB, logo têm a mesma amplitude. ■

Um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.



Demonstração:

Seja $[ACB]$ um triângulo inscrito numa semicircunferência como na figura ao lado.
O ângulo ACB é um ângulo inscrito na circunferência de centro O. O ângulo AOB, de amplitude $180°$, é o ângulo ao centro correspondente ao ângulo inscrito ACB. Então:

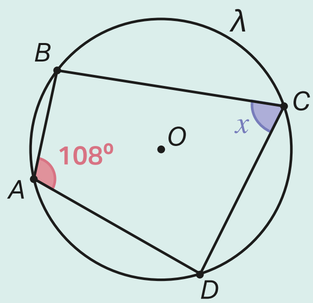
$$A\hat{C}B = \frac{A\hat{O}B}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$ ■

Exercício

54 Na figura, A, B, C e D são pontos da circunferência λ de centro em O.

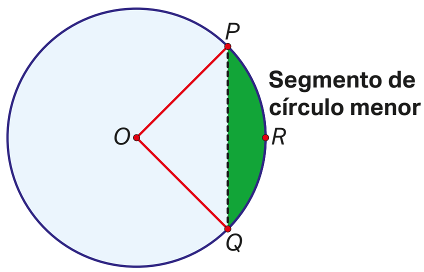
54.1. Determina a medida x, em graus, indicada na figura.

54.2. Indica a amplitude do ângulo BOD.

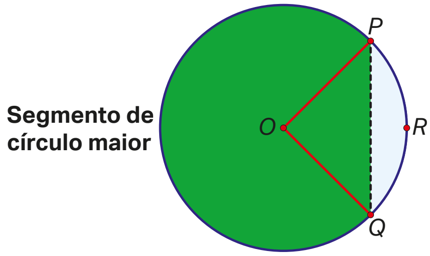


Ângulos excêntricos

> A região de um círculo compreendida entre uma corda e um arco por ela subtenso designa-se de **segmento de círculo**.



Ao segmento do círculo correspondente ao arco menor, designa-se segmento de círculo menor.



Ao segmento do círculo correspondente ao arco maior, designa-se segmento de círculo maior.

Manual Digital

Vídeo
Ângulo de um segmento de círculo

Ângulo de segmento

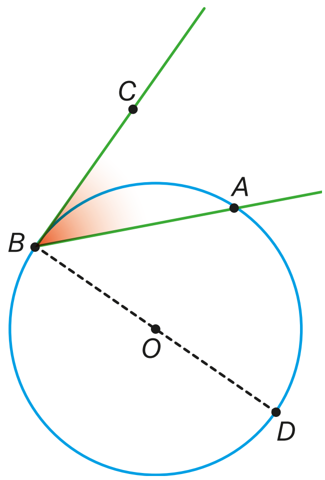
> Um ângulo de vértice num dos extremos de uma corda, em que um dos lados contém a corda e o outro lado é tangente à circunferência, designa-se por **ângulo de segmento**.

Exemplo:

Na figura ao lado está uma circunferência de centro O e de diâmetro $[BD]$.

$[AB]$ é uma corda da circunferência e a semirreta $\dot{B}C$ é tangente à circunferência.

O ângulo ABC é um ângulo de segmento.



> A amplitude de um ângulo de segmento é igual à metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

Demonstração:

Considerando a figura do exemplo anterior, como $[BD]$ é um diâmetro e a semirreta $\dot{B}C$ é tangente à circunferência no ponto B, então o ângulo DBC é reto (90°).

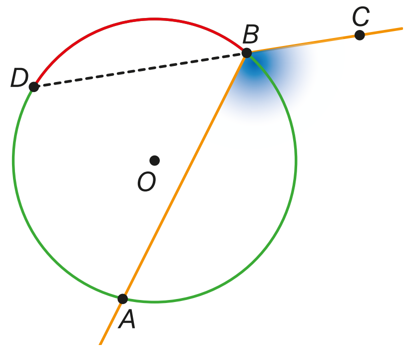
A amplitude do arco AB é:

$$\overset{\frown}{AB} = 180^\circ - \overset{\frown}{DA} = 180^\circ - 2 \times D\hat{B}A = 2 \times \left(90^\circ - D\hat{B}A\right) = 2 \times A\hat{B}C$$

Assim, a amplitude do ângulo ABC é igual à metade do arco compreendido entre os seus lados (arco AB). ■

Ângulo ex-inscrito

Um **ângulo ex-inscrito** num arco de circunferência é um ângulo adjacente a um ângulo inscrito e a ele suplementar.



Exemplo:

Na figura, está uma circunferência de centro O.

$[AB]$ é uma corda da circunferência e $[DB]$ é uma corda da circunferência contida na semirreta $\dot{D}C$.

O ângulo ABC é um ângulo ex-inscrito, suplementar ao ângulo DBA, porque a soma das suas amplitudes é $180°$.

A amplitude de um ângulo ex-inscrito é igual à semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados contêm.

$$A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$$

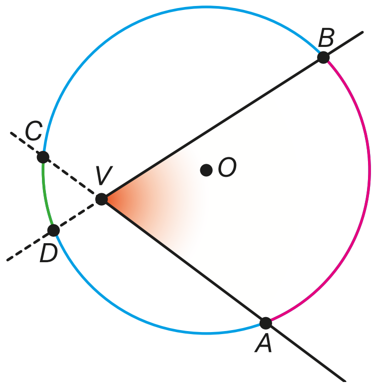
Exercício

55 Efetua a demonstração da propriedade anterior.

Ângulo convexo de vértice no interior de um círculo

Demonstração:

Considere-se o ângulo convexo AVB com vértice no interior do círculo de centro O e os arcos AB e CD.



O ângulo AVB é um ângulo externo do triângulo $[BCV]$. Logo, a sua amplitude é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes deste triângulo.

$C\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$, assim como $A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

Assim, $A\hat{V}B = A\hat{C}B + C\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$.

Logo, a amplitude do ângulo AVB é igual à semissoma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo verticalmente oposto (arcos AB e CD). ■

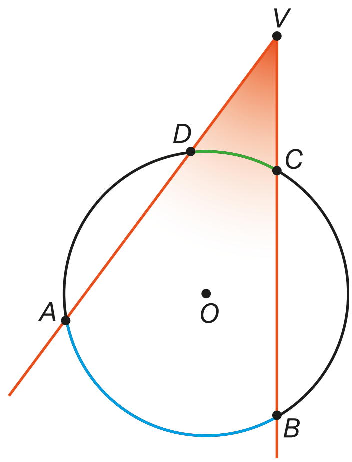
A amplitude de um **ângulo convexo de vértice no interior de um círculo** é igual à semissoma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo verticalmente oposto.

$$A\hat{V}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$$

Ângulo de vértice no exterior de um círculo

Demonstração:

Considera a figura ao lado. O ângulo AVB é um ângulo de vértice exterior ao círculo de centro O.



$\overset{\frown}{AB} = 102°$ é a amplitude do arco maior compreendido entre os lados do ângulo AVB.

$\overset{\frown}{CD} = 54°$ é a amplitude do arco menor compreendido entre os lados do ângulo AVB.

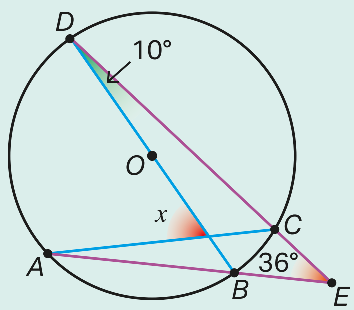
Logo, $A\hat{V}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{102° - 54°}{2} = 24°$. ■

A amplitude de um **ângulo de vértice exterior a um círculo** e cujos lados o intersetam é igual à semidiferença entre a maior e a menor das amplitudes dos arcos compreendidos entre os respetivos lados.

$$A\hat{V}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

Exercício

56 Na figura, A, B, C e D são pontos da circunferência de centro em O.



56.1. Determina a amplitude do arco $\overset{\frown}{BC}$.

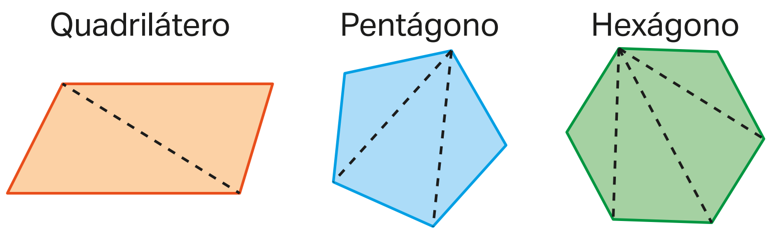
56.2. Determina a amplitude do arco $\overset{\frown}{DA}$.

56.3. Determina a amplitude de x.

4.4.2. Ângulos de um polígono

Ângulos internos de um polígono

Um polígono convexo pode ser sempre dividido em triângulos, como exemplificado nas seguintes imagens.



Um polígono convexo com n lados pode ser dividido em $n-2$ triângulos, no mínimo.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, então a soma das medidas das amplitudes dos ângulos internos de:

- um quadrilátero é $(4-2)\times 180° = 2\times 180° = 360°$.
- um pentágono é $(5-2)\times 180° = 3\times 180° = 540°$.
- um hexágono é $(6-2)\times 180° = 4\times 180° = 720°$.

A soma das medidas das amplitudes, em graus, dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é igual a $(n-2)\times 180°$.

Exercício

57 Determina a soma das medidas das amplitudes, em graus, dos ângulos internos de:

57.1. um losango;

57.2. um trapézio;

57.3. um heptágono;

57.4. um polígono convexo com 14 lados.

Ângulos externos de um polígono

A soma de n ângulos externos com vértices distintos é igual a um ângulo giro (360°), para um polígono com n lados.

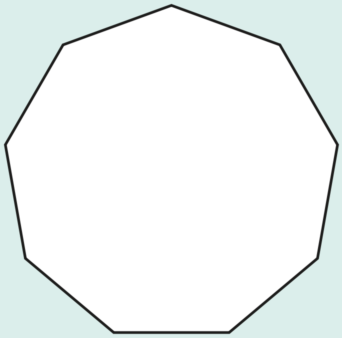
Exercício

58 Observa o eneágono regular na figura ao lado e indica:

58.1. a soma dos ângulos internos do eneágono;

58.2. a amplitude, em graus, de um ângulo externo do eneágono;

58.3. a amplitude, em graus, de um ângulo interno do eneágono.



Manual Digital

Interatividades
Soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono

Soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono

Exercícios
Reconhecer propriedades de ângulos de quadriláteros inscritos em circunferências

Calcular amplitudes de ângulos e arcos de circunferência

4.4.3. Polígonos inscritos numa circunferência

Quadrilátero inscrito numa circunferência

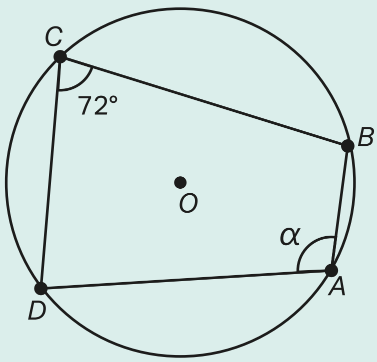
A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é igual a um ângulo raso ($180°$).

Exercício

59 Observa o quadrilátero inscrito na circunferência representada na figura.

59.1. Indica a amplitude de α.

59.2. Indica a amplitude do ângulo DOB.

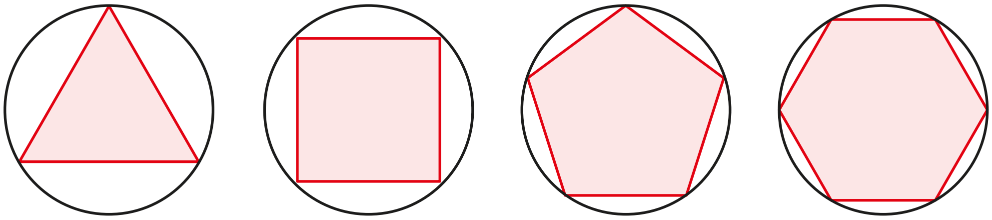


Polígonos regulares inscritos numa circunferência

Os polígonos regulares podem ser sempre inscritos numa circunferência.

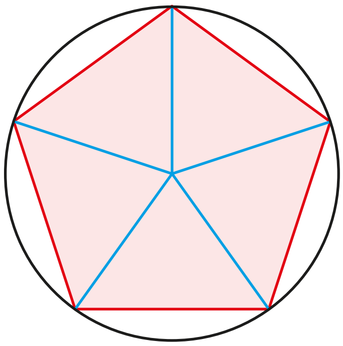
Os lados do polígono regular correspondem a cordas da circunferência, que têm o mesmo comprimento.

Os ângulos ao centro correspondentes a essas cordas também têm a mesma amplitude.



Técnica para a construção de um polígono regular

Repara que, ao construir um polígono regular inscrito numa circunferência, obtém-se cordas da circunferência todas geometricamente iguais, às quais correspondem ângulos ao centro também geometricamente iguais.



Para construir um polígono regular inscrito com n lados, pode-se seguir os passos:

1.º Determina a amplitude dos ângulos ao centro, dividindo $360°$ pelo número de lados do polígono.

2.º Com a ajuda do transferidor, traça um ângulo ao centro e a respetiva corda correspondente.

3.º Repete o processo até concluir as n cordas (lados do polígono).

Exercícios

60 Constrói um hexágono regular inscrito numa circunferência.

61 Constrói um pentágono regular inscrito numa circunferência.

62 Prova a propriedade: *A soma das medidas das amplitudes, em graus, dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é igual a* $(n-2) \times 180°$.

63 Prova a propriedade: *A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é igual a um ângulo raso* (180°).

Para aplicar

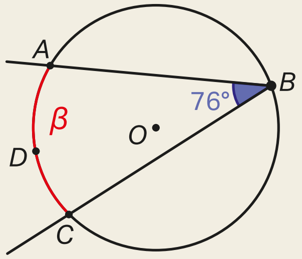
1 Considera a circunferência de centro O representada na figura.

Os pontos A, B, C e D são pontos da circunferência e $A\hat{B}C = 76°$.

1.1. Indica a amplitude do arco AC.

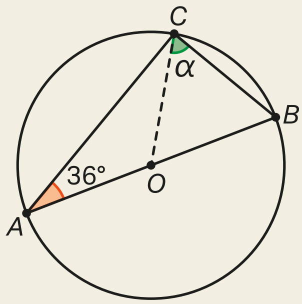
1.2. Indica a amplitude do arco maior CA.

1.3. Indica a amplitude o ângulo AOC.

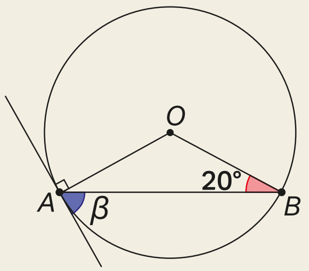


2 Considera a circunferência de centro O representada na figura.

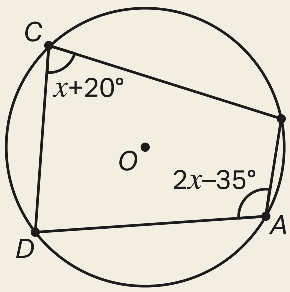
Os pontos A, B e C são pontos da circunferência. Determina a amplitude de α.



3 Sabendo que os pontos A e B são pontos da circunferência de centro O, determina a amplitude de β, que $[AB]$ faz com a tangente no ponto A.



4 O quadrilátero $[ABCD]$ está inscrito na circunferência de centro O. Determina o valor de x.



5 Qual é a amplitude dos ângulos internos de um pentágono regular?

6 Qual é soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono regular com 14 lados?

7 Existirá um polígono regular com um ângulo externo de amplitude $50°$? Justifica a tua resposta.

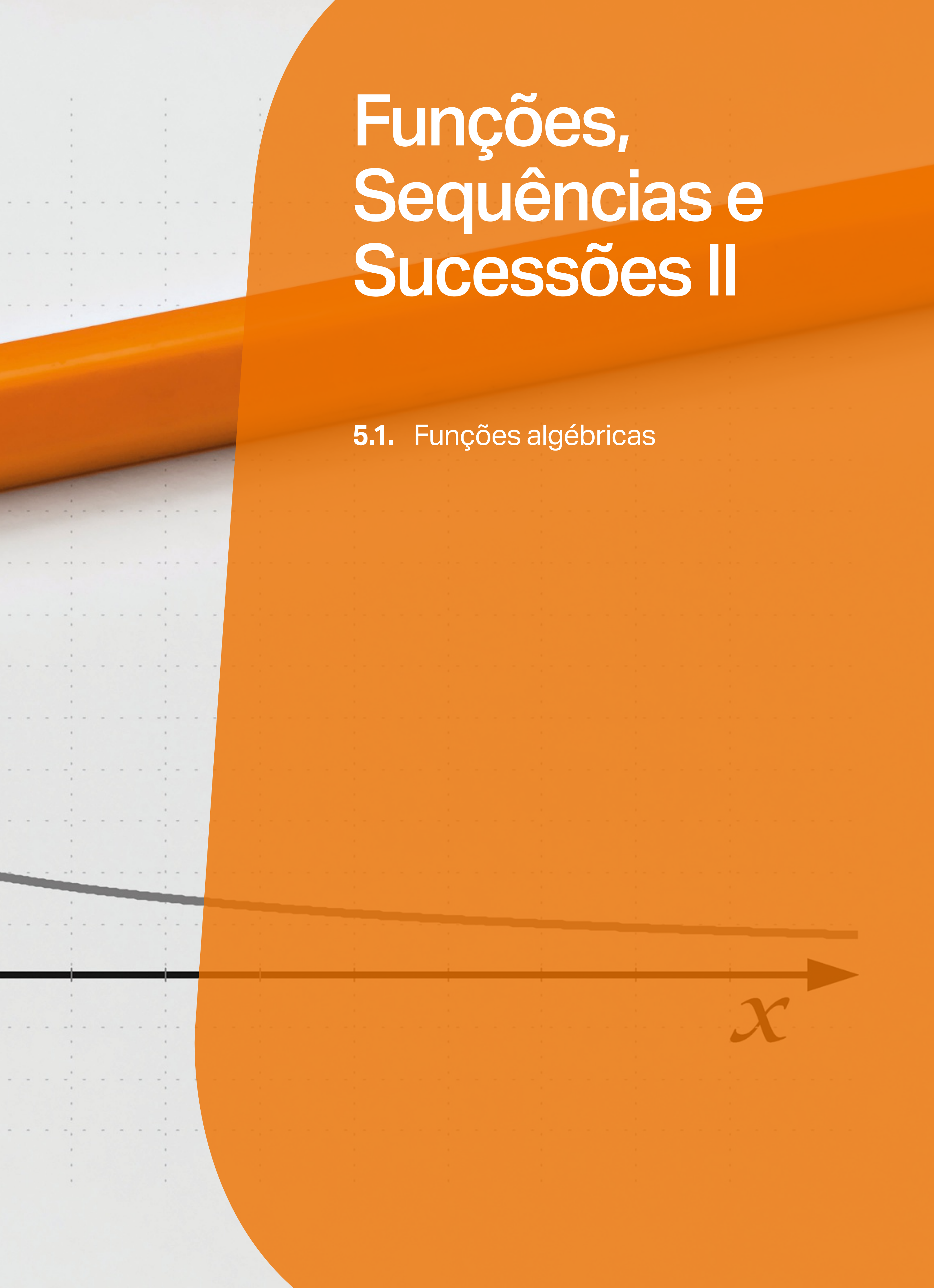
8 Constrói um triângulo equilátero inscrito numa circunferência.

9 Prova a propriedade: A amplitude de um ângulo de vértice exterior a um círculo e cujos lados o intersetam é igual à semidiferença entre a maior e a menor das amplitudes dos arcos compreendidos entre os respetivos lados.


5
$f(x)$

Funções, Sequências e Sucessões II

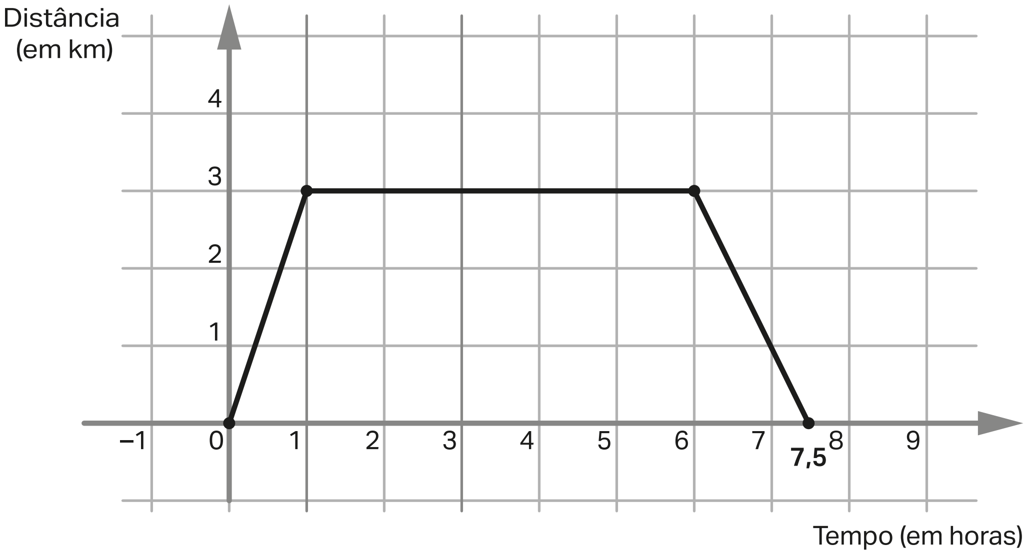
5.1. Funções algébricas



Antes de começar

1 **A Rita foi almoçar com os avós este fim de semana.**

O gráfico seguinte traduz a viagem da Rita, desde casa dos pais até à casa dos avós, regressando depois a casa dos pais, e representa a distância, em quilómetros, em função do tempo, em horas.



1.1. Observa o gráfico com atenção.

a) A que distância da casa dos pais da Rita fica a casa dos seus avós?

b) Quanto tempo ficou a Rita na casa dos avós?

c) Sabendo que a Rita saiu da casa dos pais às 9 horas da manhã, a que horas saiu a Rita da casa dos avós?

d) Qual foi a viagem que durou mais tempo, a ida ou a volta? Justifica.

1.2. Atendendo aos dados do gráfico:

a) Justifica que o gráfico representa uma função.

b) Indica a variável dependente e a variável independente.

c) Indica a imagem de 2 e a imagem de 7.

d) Quais são os valores de t (tempo) que têm como imagem 0? Qual é o seu significado no contexto do problema?

e) Apresenta, na forma de intervalo de números reais, o domínio e o contradomínio da função.

2 **Considera as tabelas em que se relacionam variáveis x e y.**

A

x	1	2	5	6
y	4	8	10	12

B

x	1	2	3	4
y	12	6	4	3

C

x	1	2	3	4
y	4	8	9	10

D

x	1	2	5	6
y	14	7	6	5

2.1. Para cada uma das tabelas, quando a variável x aumenta, o que acontece à variável y?

2.2. Alguma das tabelas traduz uma situação de proporcionalidade direta? Justifica.

3 **A tabela seguinte apresenta a relação entre duas grandezas, x e y, diretamente proporcionais.**

x	1	2	3	10	
y			15		150

3.1. Completa a tabela.

3.2. Indica a constante de proporcionalidade direta.

3.3. Apresenta uma expressão algébrica que relacione as duas variáveis.

5 Funções, Sequências e Sucessões II

Manual Digital

Vídeo
Grandezas inversamente proporcionais e constante de proporcionalidade

Como já verificámos no tema 2, o estudo de funções é um dos conteúdos mais relevantes na aprendizagem da matemática. As funções podem modelar muitas situações concretas da realidade. Neste tema, vamos estudar as funções de proporcionalidade inversa e as funções do tipo $f(x)=ax^2$, com $a\neq 0$, um caso particular da família das funções quadráticas.

Para uma boa aprendizagem é importante conhecer e articular bem as diferentes formas de representação destas funções: algébrica, numérica e gráfica.

5.1. Funções algébricas

5.1.1. Proporcionalidade inversa

Grandezas inversamente proporcionais

Uma grandeza y é inversamente proporcional a uma grandeza x, da qual depende, quando, na mesma unidade, o produto entre dois quaisquer valores correspondentes é constante, isto é,

$$x\times y=k\text{, onde } k \text{ é um valor constante.}$$

Esse valor constante k designa-se por **constante de proporcionalidade**.

Quando uma grandeza y é inversamente proporcional a uma grandeza x, então x é também inversamente proporcional a y, com igual constante de proporcionalidade.

E dizemos que x e y são **grandezas inversamente proporcionais**.

Exemplo:

A tabela seguinte apresenta a relação entre as grandezas x e y.

x	1	2	3	4	6
y	12	6	4	3	2

$$1\times 12=2\times 6=3\times 4=4\times 3=6\times 2=12$$

$$x\times y=12 \longrightarrow \text{constante de proporcionalidade inversa}$$

Assim, x e y são grandezas inversamente proporcionais porque o produto de x por y é sempre 12.

Como $x\times y=12$, existem outras expressões algébricas que relacionam x e y. São elas:

$$x=\frac{12}{y} \text{ e } y=\frac{12}{x}$$

Manual Digital

Exercício
Resolver problemas de proporcionalidade inversa

Exercícios

1 Considera as tabelas que relacionam as variáveis a e b.

A

a	1	2	5	6
b	4	8	10	12

B

a	24	12	8	4
b	6	3	2	1

C

a	24	12	8	4
b	1	2	3	6

D

a	1	2	5	8
b	200	100	40	25

Para cada uma das situações, indica, justificando, se se trata de uma relação de proporcionalidade inversa.

2 Um grupo de amigos vai comprar um bolo para oferecer ao Adérito no seu aniversário.
O valor com que cada amigo deverá contribuir para a compra do bolo dependerá do número de amigos.
A tabela seguinte relaciona o número de amigos do Adérito com o valor a ser pago por cada um deles.

a **(n.º de amigos)**	4	5		20
v **(valor pago, em escudos)**	250		100	

Sabendo que o número de amigos é inversamente proporcional ao valor pago por cada amigo:

2.1. Completa a tabela.

2.2. Indica a constante de proporcionalidade inversa e o seu significado.

2.3. Quantos amigos deveriam contribuir para que cada um contribuísse com 125 escudos?

2.4. Indica o número de amigos que contribuíram, tendo em conta que cada um contribuiu com 25 escudos.

5.1.2. Funções de proporcionalidade inversa

Consideremos um retângulo com 360 m^2 de área. A tabela seguinte relaciona as grandezas inversamente proporcionais: medida do comprimento (c) do retângulo e a medida da largura do retângulo (l).

$\times 2$ $\times 3$ $\times 4$

Comprimento (em metros)	15	30	45	60
Largura (em metros)	24	12	8	6

$\times \frac{1}{2}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{4}$

A constante de proporcionalidade inversa é 360, que representa a área do retângulo.

A correspondência entre a medida do comprimento (c) do retângulo e a medida da largura do retângulo (l) é uma função, que pode ser designada por f, uma vez que a cada medida do comprimento corresponde uma e uma só medida da largura. A função f é uma função de proporcionalidade inversa.

Sendo c a medida do comprimento do retângulo, a medida da largura é $f(c)$.

Considerando a medida do comprimento (c) do retângulo como a variável independente, verifica-se que:

- Quando a medida do comprimento duplica, a medida da largura passa para a metade.
- Quando a medida do comprimento triplica, a medida da largura passa para a terça parte.
- Quando a medida do comprimento quadruplica, a medida da largura passa para a quarta parte.

Ou seja:

- Quando multiplicamos o comprimento por 2, a largura é multiplicada pelo inverso de 2.
- Quando multiplicamos o comprimento por 3, a largura é multiplicada pelo inverso de 3.
- Quando multiplicamos o comprimento por 4, a largura é multiplicada pelo inverso de 4.

Por exemplo, $f(4 \times 15) = f(60) = 6$ e $\frac{1}{4} \times f(15) = \frac{1}{4} \times 24 = 6$

Ao multiplicarmos a variável independente c por um dado número positivo x, a variável dependente $l = f(c)$ fica multiplicada pelo inverso desse número, ou seja,

$$f(x,\ c) = \frac{1}{x} f(c)$$

Se $c = 1$, temos $f(x) = \frac{1}{x} f(1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{f(1)}{x}$.

Como $c \times l = 360$, então $l = \frac{360}{c}$.

Podemos representar a função por: $f(c) = \frac{360}{c}$.

Uma **função de proporcionalidade inversa** é uma função f do tipo $\boldsymbol{f(x) = \frac{k}{x}}$, com $x \neq 0$ e $k \neq 0$, em que $f(1) = k$ representa a constante de proporcionalidade inversa.

Exercícios

3 **A tabela seguinte relaciona o caudal de uma torneira, em litros por minuto, C, com o tempo necessário para encher um depósito de água, em minutos, t.**

C – caudal (litros por minuto)	80	40	20	10
t – tempo (minutos)	2	4	8	16

3.1. Mostra que as grandezas caudal e tempo são inversamente proporcionais.

3.2. Determina a constante de proporcionalidade inversa e indica o seu significado no contexto do problema.

3.3. Apresenta uma função algébrica que relacione as duas grandezas C e t.

4 **Na quinta da mãe do Jorge existe uma grande plantação de quiabos.**
Para colher todos os quiabos em duas horas são necessárias 5 pessoas.
Sabendo que a relação do tempo necessário, em horas, para apanhar todos os quiabos e o número de pessoas que o fazem é inversamente proporcional:

4.1. Indica a constante de proporcionalidade inversa.

4.2. Apresenta uma função algébrica que relacione as duas grandezas.

4.3. Determina o número de pessoas necessárias para colher os quiabos em duas horas e meia.

5 O comprimento de onda de rádio (w), em metros, é inversamente proporcional à sua frequência (f), em quilociclos.

Uma expressão algébrica que representa a relação entre o comprimento de uma onda de rádio e a sua frequência é:

$$w = \frac{300000}{f}$$

5.1. O que acontece ao comprimento de onda quando a frequência de uma onda de rádio é reduzida a metade? E quando duplica?

5.2. Resolve a equação dada em ordem a f.

5.3. Determina a frequência de uma onda de rádio cujo comprimento de onda seja de 1500 metros.

6 Para um evento de moda, foram encomendados dez *panos d'Obra* à senhora Zulmira.

A tabela seguinte relaciona as horas de trabalho diárias com o número de dias necessários para a conclusão da encomenda.

Horas de trabalho diárias (x)	Dias necessários para concluir a encomenda (y)
4	30
6	20
8	15
10	12

6.1. Mostra que x e y são grandezas inversamente proporcionais.

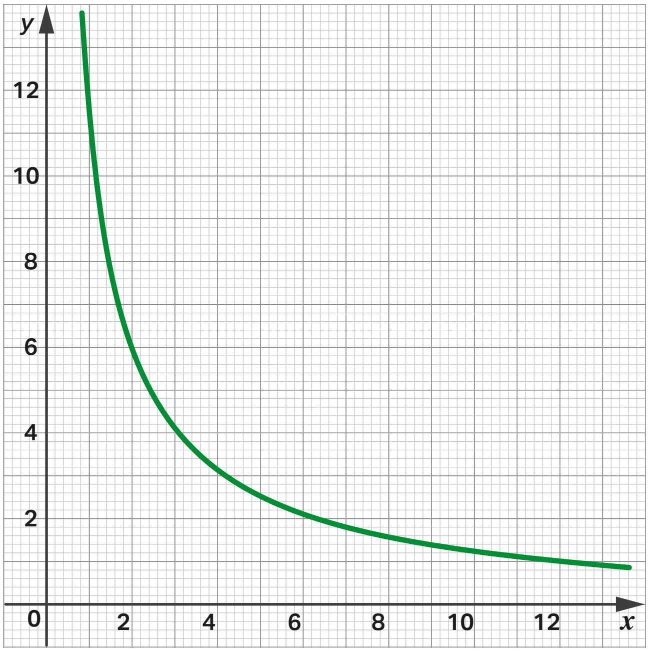
6.2. Apresenta uma função algébrica que relacione as duas grandezas.

6.3. Sabendo que a senhora Zulmira pretende dedicar cinco horas diárias à confeção dos *panos d'Obra*, quantos dias serão necessários para concluir a encomenda?

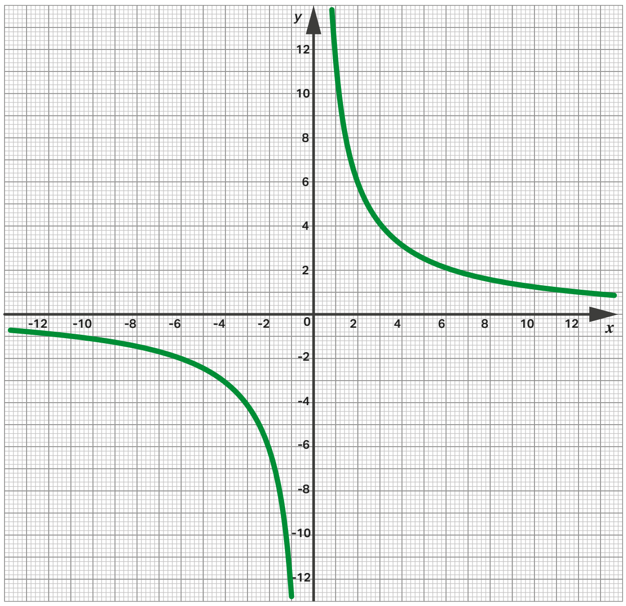
5.1.3. Gráficos de funções de proporcionalidade inversa

Consideremos a função de proporcionalidade inversa $f(x)=\dfrac{12}{x}$, com $x>0$.

Fixado um referencial cartesiano no plano, podemos representar o gráfico desta função de proporcionalidade inversa, que origina uma curva designada por **ramo de hipérbole.**



Se considerarmos, agora, a extensão da função ao conjunto, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, obtemos ainda a imagem deste ramo de hipérbole pela reflexão central relativa à origem. A esta curva do plano designamos de hipérbole.

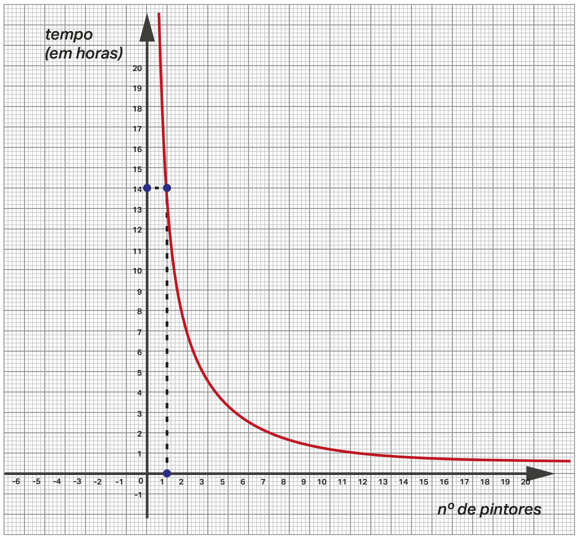


Manual Digital

Vídeo
Gráfico de uma função de proporcionalidade inversa

Exemplo:

O seguinte gráfico corresponde à representação da função f.



A função f, de proporcionalidade inversa, traduz a relação entre o número de pintores e o tempo necessário para concluírem a pintura exterior de uma casa.

Observando o gráfico, verificamos que:

$$f(1) = 14$$

A constante de proporcionalidade inversa é 14.

No contexto do exemplo, 14 corresponde ao número de horas necessárias para pintar o exterior da casa por 1 pintor.

A função que representa o exemplo é: $f(x) = \frac{14}{x}$.

Exercícios

7 A tabela ao lado apresenta a relação entre duas variáveis a e b inversamente proporcionais.

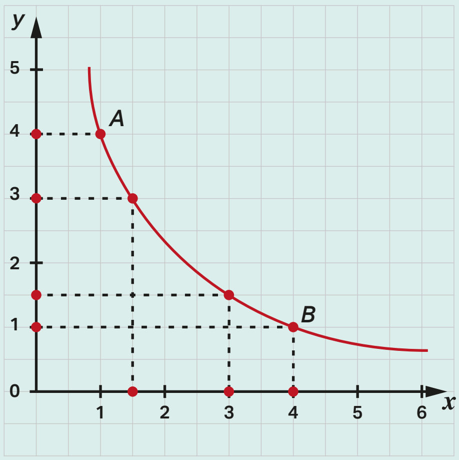
a	2		3	6	
b		5	4		1,6

7.1. Determina os valores em falta na tabela.

7.2. Apresenta a expressão algébrica de uma função que relacione as duas grandezas.

7.3. Efetua um esboço gráfico da função que relacione as duas grandezas.

8 Considera a função f de proporcionalidade inversa representada graficamente.



8.1. Determina a constante de proporcionalidade inversa da função f.

8.2. Apresenta a expressão algébrica da função f.

8.3. Determina as coordenadas dos pontos A e B.

Manual Digital

Vídeo
Funções do tipo $f(x) = ax^2$

5.1.4. Funções $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$

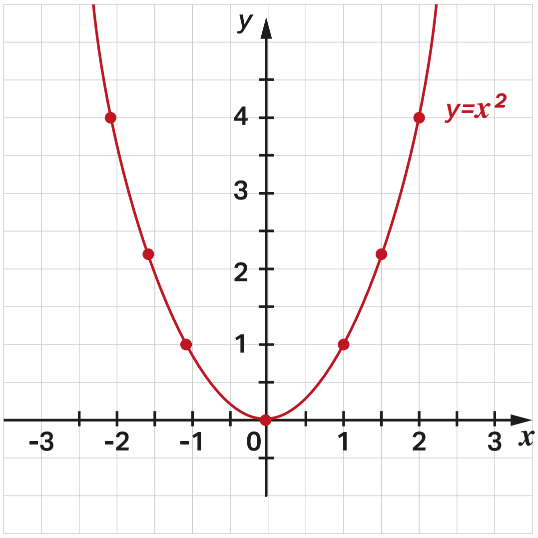
Gráficos de funções $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$

As funções do tipo $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, são funções da família das funções quadráticas.
Os gráficos que representam funções quadráticas designam-se por **parábolas.**

Gráficos da função $f(x) = x^2$

O gráfico desta função é uma parábola de eixo vertical com **vértice na origem do referencial.**
A parábola é **simétrica em relação ao eixo dos yy.**

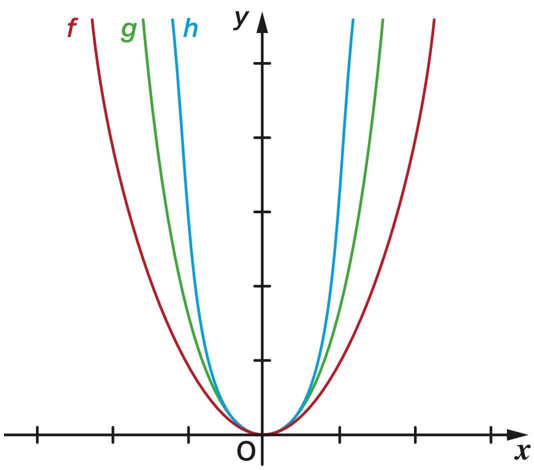
x	$y = f(x)$
0	0
1	1
– 1	1
1,5	2,25
– 1,5	2,25
2	4
– 2	4



Gráficos de funções do tipo $f(x) = ax^2$, com $a > 0$

As funções do tipo $f(x) = ax^2$, com $a > 0$:

- Têm como domínio $\mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$;
- Têm como contradomínio $\mathbb{R}_0^+$, $CD = [0, +\infty[$;
- Têm a concavidade voltada para cima;
- São simétricas em relação ao eixo dos yy;
- O vértice da parábola é na origem, ponto $(0;\ 0)$;
- À medida que o valor de a aumenta, a parábola estreita (fica mais próxima do eixo dos yy).
- À medida que o valor de a diminui $(0 < a < 1)$, a parábola alarga (fica mais afastada do eixo dos yy).



Manual Digital

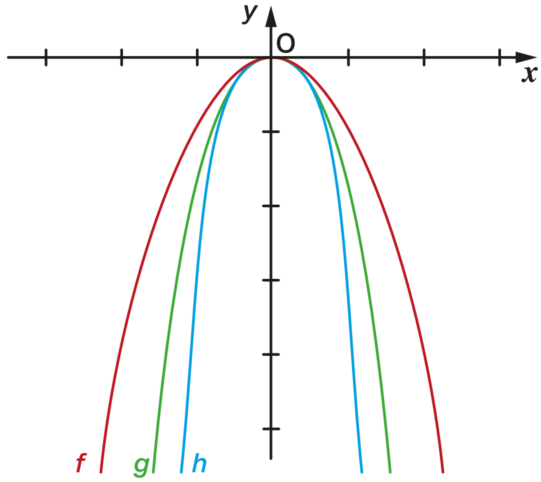
Exercícios
Identificar o sentido da concavidade de uma parábola

Relacionar o valor do parâmetro a com a concavidade da parábola

Gráficos de funções do tipo $f(x) = ax^2$, com $a < 0$

As funções do tipo $f(x) = ax^2$, com $a < 0$:

- Têm como domínio $\mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}$;
- Têm como contradomínio $\mathbb{R}_0^-$, $CD =]-\infty\,;\,0]$;
- Têm a concavidade voltada para baixo;
- São simétricas em relação ao eixo dos yy;
- O vértice da parábola é na origem, ponto $(0\,;\,0)$;
- À medida que o valor absoluto de a aumenta, a parábola estreita (fica mais próxima do eixo dos yy).



- À medida que o valor absoluto de a diminui $0 < |a| < 1$, a parábola alarga (fica mais afastada do eixo dos yy).

Exercícios

9 Considera as funções:

$$f(x) = 2x^2\,; \qquad g(x) = -2x^2\,;$$
$$h(x) = -x^2\,; \qquad i(x) = -3x^2$$

9.1. Representa graficamente, no mesmo referencial, as quatro funções.

9.2. Que funções têm a concavidade voltada para baixo?

9.3. Qual das funções é representada graficamente por uma parábola mais estreita? Justifica a tua resposta.

9.4. Indica o domínio e o contradomínio de cada uma das funções.

10 Considera a função $f(x) = 3x^2$.

10.1. Determina $f(-4)$ e $f(4)$.

10.2. Determina os valores de x que têm como imagem 81.

10.3. Determina os valores de x que têm como imagem 63.

10.4. Representa graficamente a função f.

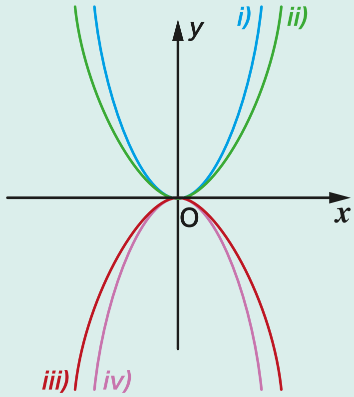
10.5. Indica a simetria, o sentido de concavidade e o vértice do gráfico que representa a função f.

11 Na figura estão representadas as funções f, g, h e j.

$$f(x)=\frac{\pi}{4}x^2; \qquad g(x)=-5x^2;$$

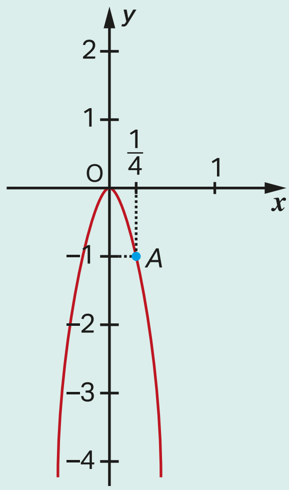
$$h(x)=\frac{5}{3}x^2; \qquad j(x)=-\frac{7}{2}x^2$$

Indica a correspondência correta entre as funções e as respetivas representações gráficas.

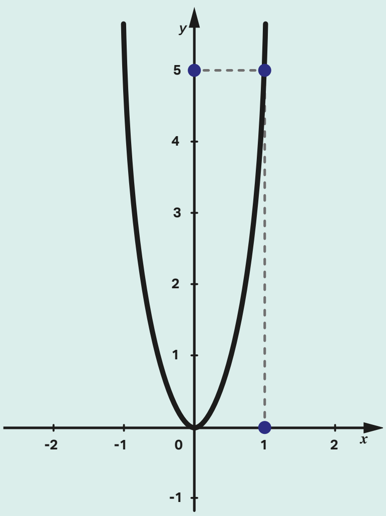


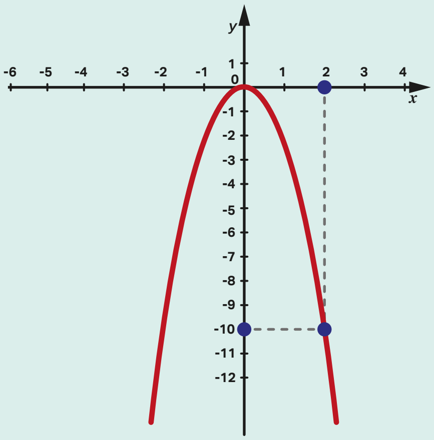
12 Na figura está a representação gráfica de uma função g do tipo $y=ax^2$, com $a\neq 0$.

Sabendo que o ponto $A\left(\frac{1}{4};\,-1\right)$ pertence à parábola, apresenta a expressão algébrica da função g.



13 Considera as parábolas de eixo vertical e com vértice na origem a seguir representadas.





Para cada parábola, escreve a equação que a defina.

5.1.5. Interpretar graficamente soluções de equações do segundo grau

Manual Digital

Exercício
Resolver uma equação do 2.º grau

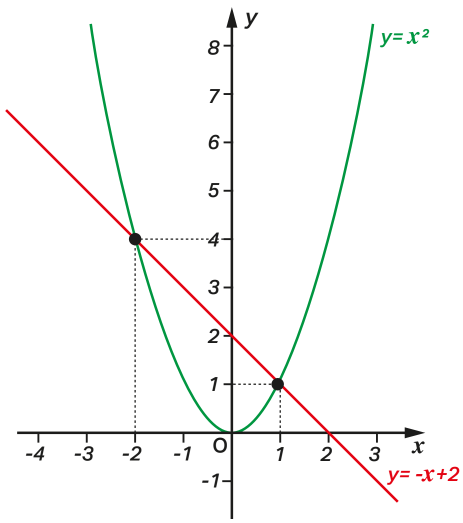
Consideremos a equação do 2.º grau $x^2+x-2=0$.

Para resolver esta equação, podemos recorrer à fórmula resolvente. Outro processo para resolver a equação é graficamente, considerando que $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x^2=-x+2$.

Graficamente

Representa-se a parábola de equação $\boldsymbol{y=x^2}$.

Representa-se a reta de equação $\boldsymbol{y=-x+2}$.



As coordenadas dos pontos de interseção da parábola e da reta são $(-2\,;\,4)$ e $(1\,;\,1)$.

As soluções da equação $x^2+x-2=0$ correspondem às abcissas de interseção dos gráficos: -2 e 1.

Analiticamente, com a fórmula resolvente

$$\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1+3}{2} \vee x=\frac{-1-3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-2$$

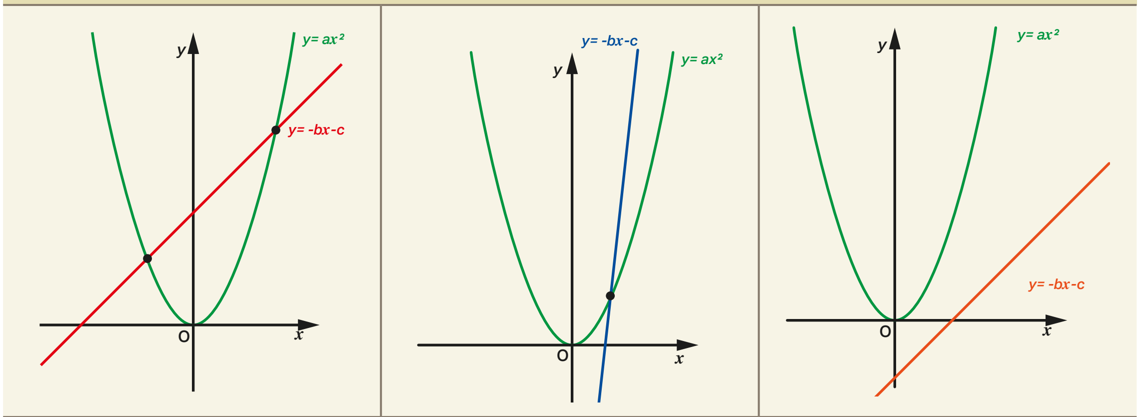
$$S=\{-2\,;\,1\}$$

O conjunto-solução de uma equação do 2.º grau $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ é o conjunto das abcissas dos pontos de interseção da parábola de equação $\boldsymbol{y=ax^2}$, com a reta de equação $\boldsymbol{y=-bx-c}$.

Manual Digital

Vídeo
Interpretação gráfica da solução de equações do 2.º grau

Interpretação gráfica do número de soluções uma equação do 2.º grau:
$ax^2+bx+c=0$, com $a>0$ e $b>0$



A equação tem duas soluções.	A equação tem uma solução.	A equação não tem soluções.

Nota: Para outros valores de a e b, a interpretação gráfica será análoga. Isto é, se a reta intersetar a parábola em dois pontos, a equação do 2.º grau terá duas soluções; em um ponto, terá uma solução; se não intersetar, a equação não terá soluções.

Exercícios

14 No referencial cartesiano estão representadas graficamente as funções f e g.

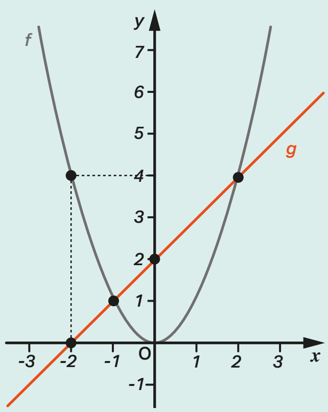
A função f é do tipo $f(x)=ax^2$, com $a\neq 0$.

A função g é uma função afim.

14.1. Quantas soluções tem a equação $f(x)=g(x)$? Justifica a tua resposta.

14.2. Determina as expressões algébricas que definem as funções f e g.

14.3. Determina as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos de f e de g.



15 Considera as funções f e g definidas por $f(x)=-x^2$ e $g(x)=x-3$.

15.1. Determina algebricamente as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos que representam as funções f e g.

15.2. No mesmo referencial, traça um esboço dos gráficos das funções f e g.

Para aplicar

1 A tabela seguinte apresenta a relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas t, tempo, em dias, e n, o número de operários necessários à realização de uma tarefa.

tempo (t) em dias	2	4	6	3	12
número de operários (n)	6	a	2	4	b

1.1. Determina os valores de a e b.

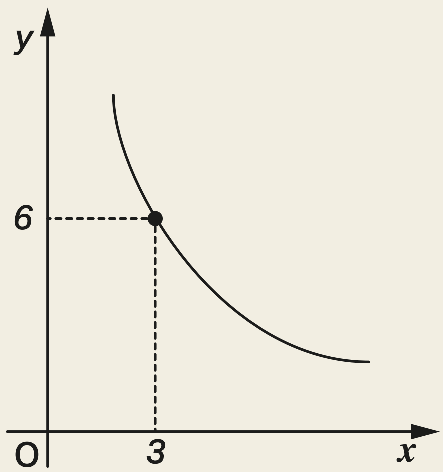
1.2. Apresenta uma expressão algébrica que traduza a relação de proporcionalidade inversa entre n e t.

1.3. Efetua o esboço gráfico da função n para o intervalo $t \in [0\,;\ 12]$.

2 Considera a função de proporcionalidade inversa f, representada graficamente no referencial cartesiano da figura ao lado. O ponto de coordenadas $(3\,,\ 6)$ pertence ao gráfico da função f.

2.1. Determina a constante de proporcionalidade inversa.

2.2. Indica uma expressão algébrica que represente f.



3 A senhora Zulmira aumentou a sua produção de quiabos e precisa de máquinas para empacotar os quiabos. Uma máquina demora 84 horas para empacotar todos os quiabos.

3.1. Se estiverem 6 máquinas iguais a funcionar ao mesmo tempo, quanto tempo demora a empacotar todos os quiabos?

3.2. A senhora Zulmira precisa de empacotar os quiabos em 35 horas. Qual é o número mínimo de máquinas de empacotar que deverá utilizar?

4 **Considera as funções f e g, tais que:**

$$f(x)=6x^2 \text{ e } g(x)=2x^2$$

4.1. Determina as coordenadas do ponto do gráfico de f que têm:

4.1.1. abcissa -3.

4.1.2. ordenada 75 e abcissa positiva.

4.2. Determina $g(5)$.

4.3. Justifica a afirmação: *"O gráfico que representa a função f é mais estreito do que o gráfico que representa a função g."*

5 **Considera as funções g e h, tais que:**

$$g(x)=x^2 \text{ e } h(x)=-2x$$

5.1. Representa, num mesmo referencial, as funções g e h.

5.2. Indica, através da interpretação gráfica, o número de soluções da equação $x^2+2x=0$. Justifica a tua resposta.

5.3. Indica, através da interpretação gráfica, as soluções da equação $x^2+2x=0$.

5.4. Resolve, algebricamente, a equação $x^2+2x=0$.

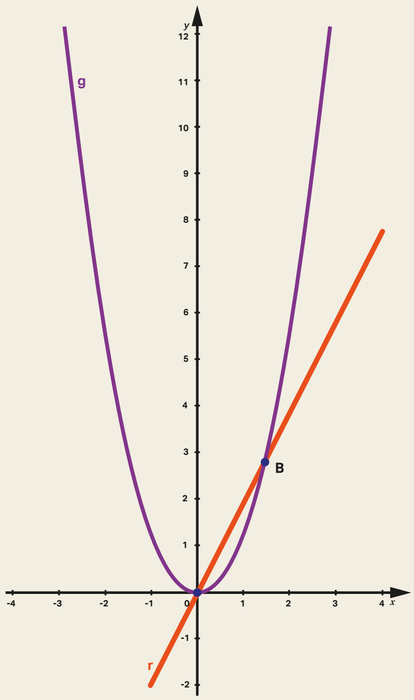
6 **No referencial ao lado estão representadas a reta r e a parábola g.**

A reta e a parábola intersetam-se na origem e no ponto B.

O ponto de coordenadas $(1;\ \sqrt{2})$ pertence à parábola.

6.1. Indica uma expressão algébrica que defina a parábola .

6.2. Sabendo que a equação da reta r é $y=2x$, determina a ordenada do ponto B.



6

Álgebra II

6.1. Inequações

6 Álgebra II

6.1. Inequações

6.1.1. Inequação definida por um par de funções

Uma **inequação com uma incógnita x** é uma desigualdade na qual figura uma única variável x, que representa um valor desconhecido.
Exemplos de inequação com uma incógnita:

$$x+1>3\,;\quad 2x-7>12x\,;\quad 1<x+3\,;\quad \frac{7x-4}{2}\leqslant 5x\,;\quad x^2+1\geqslant 8$$

Numa inequação, o sinal de desigualdade separa duas expressões $f(x)$ e $g(x)$, que podem ser entendidas como expressões algébricas de funções f e g.

$$\underbrace{x+1}_{f(x)}>\underbrace{3}_{g(x)}\,;\ \underbrace{2x-7}_{f(x)}<\underbrace{12x}_{g(x)}$$

A expressão $f(x)$ designa-se por **primeiro membro da inequação** e fica à esquerda do sinal de desigualdade.

A expressão $g(x)$ designa-se por **segundo membro da inequação** e fica à direita do sinal de desigualdade.

$$\underbrace{x+1}_{1.^{\text{o}}\text{ membro}}>\underbrace{3}_{2.^{\text{o}}\text{ membro}}\,;\ \underbrace{2x-7}_{1.^{\text{o}}\text{ membro}}<\underbrace{12x}_{2.^{\text{o}}\text{ membro}}$$

Podemos assim definir uma inequação recorrendo a um par de funções.

Uma inequação com uma incógnita é uma desigualdade do tipo
$f(x)<g(x)$ ou $f(x)>g(x)$ ou $f(x)\leqslant g(x)$ ou $f(x)\leqslant g(x)$,
em que f e g são funções (sendo que pelo menos uma delas não é constante).

Exercícios

1 Considera as seguintes expressões e indica as que representam inequações com uma incógnita.

1.1. $4x+1>\frac{x}{2}$ **1.2.** $x+1=3$ **1.3.** $x+1<3y$

1.4. $2+\frac{4+x}{3}\leqslant 5x$ **1.5.** $y^2+1>3y$ **1.6.** $2x+3<3x+2$

2 Considera as seguintes inequações com uma incógnita.
Para cada uma das inequações, identifica os membros e a incógnita.

2.1. $x^2+2x-1>0$ **2.2.** $\pi+1<y-1$ **2.3.** $2+\frac{4+z}{3}\leqslant 5(z+3)$

6.1.2. Classificação de inequações quanto à solução

Solução de uma inequação é um número real que, ao substituir a incógnita, converte a inequação numa desigualdade verdadeira.

Exemplo:

Consideremos a inequação $x+1>3$.

- $x=4$ é uma solução da inequação, porque $4+1>3 \Leftrightarrow 5>3$ é uma desigualdade verdadeira.
- $x=7$ é uma solução da inequação, porque $7+1>3 \Leftrightarrow 8>3$ é uma desigualdade verdadeira.
- $x=1$ não é uma solução da inequação, porque $1+1>3 \Leftrightarrow 2>3$ não é uma desigualdade verdadeira.

Concluímos que $x=4$ e $x=7$ são soluções da inequação e $x=1$ não é uma solução da inequação.

Existem ainda outras soluções para além de $x=4$ e $x=7$.

Exercício

3 Averigua se -2, 0, 5 e 6 são soluções da inequação $-y+1>0$.

Ao conjunto de todas as soluções de uma inequação designamos por **conjunto-solução da inequação**.

Uma inequação **é impossível** quando não tem soluções.

Nesse caso, o seu conjunto-solução é o conjunto vazio:

$$\text{C.S.} = \varnothing \text{ ou } \text{C.S.} = \{ \}$$

Uma inequação **é possível** quando tem, pelo menos, uma solução.

Exemplos:

a) A inequação $0x>3$ é impossível, porque não existe um número real que colocado no lugar da variável converta a inequação numa desigualdade verdadeira.

b) A inequação $x+5>12$ é possível, porque existe pelo menos um número real que colocado no lugar da variável converte a inequação numa desigualdade verdadeira.

Para além de outras soluções, 10 também é uma solução da inequação, porque $10+5>12 \Leftrightarrow 15>12$ é uma desigualdade verdadeira.

Manual Digital

Exercício
Associar inequações equivalentes

Exercício

4 Indica, justificando, se cada uma das seguintes inequações é possível ou impossível.

4.1. $-3x+2<-17$ **4.2.** $x^2<0$ **4.3.** $\pi+1<y-\pi$ **4.4.** $-4>0x$

6.1.3. Inequações equivalentes

Duas ou mais **inequações** são **equivalentes** se tiverem o mesmo conjunto-solução.

Exemplo:

$$x+1>3 \text{ é equivalente a } x>2$$

$$x+1>3 \iff x>2$$

As inequações são equivalentes, porque têm o mesmo conjunto-solução. Neste caso, são soluções da inequação todos os números superiores a 2, ou seja: $\text{C.S.}=]2\,;\,+\infty[$.

6.1.4. Resolução de inequações do 1.º grau e princípios de equivalência

Resolver uma inequação é determinar o seu conjunto-solução.
À semelhança da resolução de equações, existem **princípios de equivalência** que resultam das propriedades da relação de ordem nos números reais e que permitem resolver inequações.

Exemplos:

a) Vamos resolver a inequação $2x+2>6$, utilizando as regras que advêm dos princípios de equivalência.

$$2x+2>6 \iff$$
$$\iff 2x>6-2 \iff$$
$$\iff 2x>4 \iff$$
$$\iff x>\frac{4}{2} \iff$$
$$\iff x>2$$

Regra 1
Pelo princípio da monotonia da adição, referido no capítulo1, podemos passar qualquer termo de um membro para o outro, trocando-lhe o sinal e mantendo a equivalência.

Regra 2
Pelo princípio da monotonia parcial da multiplicação, referido no capítulo1, podemos multiplicar (ou dividir) os dois membros por um número positivo, mantendo a equivalência.

$\text{C.S.}=]2\,;\,+\infty[$ ou $x\in]2\,;\,+\infty[$ (conjunto-solução)

b) Vamos resolver a inequação $-2x > 4$, utilizando as regras que advêm dos princípios de equivalência.

$$-2x > 4 \iff$$
$$\iff x < \frac{4}{-2} \iff$$
$$\iff x < -2$$

> **Regra 3**
> Pelo princípio da monotonia parcial da multiplicação, referido no capítulo1, podemos multiplicar (ou dividir) os dois membros por um número negativo, invertendo o sentido da desigualdade e mantendo a equivalência.

C.S. $=]-\infty\,;\ -2[$ ou $x \in]-\infty\,;\ -2[$ (conjunto-solução)

> **Manual Digital**
> **Exercício**
> Determinar o comprimento da diagonal de um quadrado

Exercícios

5 Para cada par de inequações seguintes, indica se representam duas inequações equivalentes.

5.1. $3x + 2 < 2$ e $2x < -x$

5.2. $4 + 5x \leqslant 3$ e $5x + 3 \leqslant -4$

5.3. $\pi + 1 < y - \pi$ e $y + 1 < 2y - 2\pi$

5.4. $4 \geqslant 0x$ e $-x^2 + 1 \geqslant 2$

6 Resolve as seguintes inequações.

6.1. $3x < 9$

6.2. $-3x < 9$

6.3. $x \geqslant -7x + 21$

6.4. $2x + 6 \geqslant x + 4$

6.5. $3x + 29 > 8x + 4$

6.6. $23 + 7x \leqslant -5x - 6$

Na resolução de inequações, para além de ser necessário aplicar as regras que advêm dos princípios de equivalência, tal como nas equações, deve-se seguir as seguintes etapas:

- Desembaraçar de parêntesis, caso existam;
- Desembaraçar de denominadores, caso existam;
- Isolar a incógnita;
- Apresentar o conjunto-solução.

> **Nota:**
> Têm de ter sempre em consideração as regras enunciadas, com base nos princípios de equivalência.

Exemplos:

- $-\frac{x}{4}+4<\frac{1}{3}(-x-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{x}{4}+4<\frac{-x}{3}-1$

$\Leftrightarrow \frac{-x+16}{4}<\frac{-x-3}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{-3x+48}{12}<\frac{-4x-12}{12}$

$\Leftrightarrow -3x+48<-4x-12$

$\Leftrightarrow -3x+4x<-12-48$

$\Leftrightarrow x<-60$

C.S. $=]-\infty\,;\,-60[$

- $\frac{5x+2}{3}-3 \geqslant 3(x-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5x+2}{3}-3 \geqslant 3x-9$

$\Leftrightarrow \frac{5x+2}{3}-\frac{9}{3} \geqslant 3x-9$

$\Leftrightarrow \frac{5x+2-9}{3} \geqslant 3x-9$

$\Leftrightarrow \frac{5x-7}{3} \geqslant 3x-9$

$\Leftrightarrow 5x-7 \geqslant 3(3x-9)$

$\Leftrightarrow 5x-7 \geqslant 9x-27$

$\Leftrightarrow 5x-9x \geqslant -27+7$

$\Leftrightarrow -4x \geqslant -20$

$\Leftrightarrow x \leqslant \frac{-20}{-4}$

$\Leftrightarrow x \leqslant 5$

C.S. $=]-\infty\,;\,5]$

Exercícios

7 Resolve as seguintes inequações, apresentando o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais.

7.1. $1+4x<3(x-2)$

7.2. $-(x-2)<5-3x$

7.3. $(-4+y)\times 7 \geqslant y(2-8)$

8 Resolve as seguintes inequações, apresentando o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais.

8.1. $1+4x \leqslant \frac{5x+1}{2}$

8.2. $\frac{1}{3}-\frac{x}{2}<\frac{5}{3}+2x$

8.3. $\frac{x+7}{4} \geqslant \frac{-9+6x}{3}$

9 Resolve as seguintes inequações, apresentando o conjunto-solução na forma de intervalo de números reais.

9.1. $\frac{8(2-x)}{5}<8$

9.2. $x-\frac{1}{3}(x-2)<3x+\frac{9}{4}$

9.3. $\frac{1}{25}(y+100) \geqslant 5^{-1}$

6.1.5. Conjunções e disjunções de inequações do 1.º grau

Considerem-se duas inequações do 1.º grau:

- $ax+b<0$, com conjunto solução S_1;
- $cx+d>0$, com conjunto solução S_2.

A **conjunção** das duas inequações representa-se por $\boldsymbol{ax+b<0 \wedge cx+d>0}$.

O conjunto-solução da conjunção das duas inequações é $S_1 \cap S_2$.

A **disjunção** das duas inequações representa-se por $\boldsymbol{ax+b<0 \vee cx+d>0}$.

O conjunto-solução da disjunção das duas inequações é $S_1 \cup S_2$.

Manual Digital

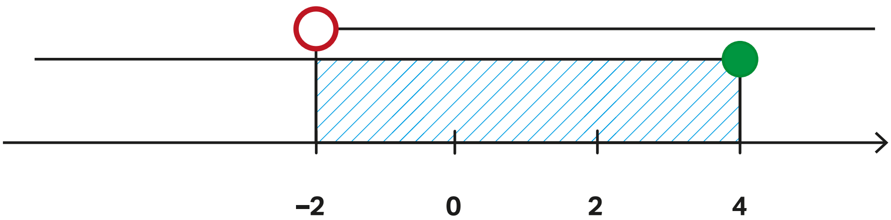
Vídeo
Conjunto-solução de conjunções ou disjunções de inequações

Exemplo:

Considerem-se duas inequações do 1.º grau:

- $3x-12 \leqslant 0$, com conjunto-solução $\text{C.S.} =]-\infty\,; 4]$;
- $4x+8>0$, com conjunto-solução $\text{C.S.} =]-2\,;\, +\infty[$.

Conjunção	Disjunção
$3x-12 \leqslant 0 \wedge 4x+8>0$	$3x-12 \leqslant 0 \vee 4x+8>0$
$3x \leqslant 12 \wedge 4x>-8$	$3x \leqslant 12 \vee 4x>-8$
$x \leqslant \frac{12}{3} \wedge x > \frac{-8}{4}$	$x \leqslant \frac{12}{3} \vee x > \frac{-8}{4}$
$x \leqslant 4 \wedge x>-2$	$x \leqslant 4 \vee x>-2$
$\text{C.S.} =]-\infty\,; 4] \cap]-2\,;\, +\infty[=$ $=]-2\,;\, 4]$	$\text{C.S.} =]-\infty\,; 4] \cup]-2\,;\, +\infty[=$ $=]-\infty\,;\, +\infty[= \mathbb{R}$



Exercícios

10 Resolve as seguintes conjunções e disjunções de inequações.

10.1. $x \leqslant 9 \wedge 7x > 12$

10.2. $x \leqslant 9 \wedge 7x > 12$

10.3. $5x - 4 \geqslant 10 \wedge 10x + 5 \leqslant 4$

10.4. $5x - 4 \geqslant 10 \vee 10x + 5 \leqslant 4$

10.5. $3(x+2) < 0 \wedge \frac{x+5}{6} > 6$

10.6. $3(x+2) < 0 \vee \frac{x+5}{6} > 6$

11 Dá o exemplo da conjunção de duas inequações cujo conjunto-solução seja C.S. $=]2\,;\,10[$.

12 Dá o exemplo da disjunção de duas inequações cujo conjunto-solução seja C.S. $=]-\infty\,;\,-3[$.

6.1.6. Resolução de problemas com inequações do 1.º grau

Na resolução de problemas que envolvem inequações do 1.º grau devemos seguir os seguintes passos:

1) Identificar a incógnita.

2) Traduzir o problema matematicamente, na forma de uma inequação.

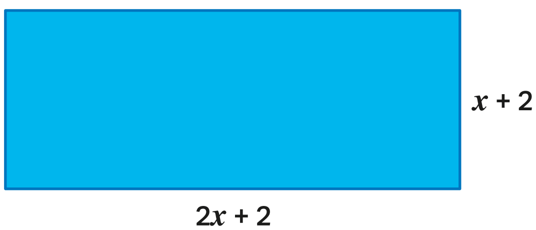
3) Resolver a inequação.

4) Interpretar o resultado obtido no contexto do problema.

5) Responder ao problema.

Problema resolvido 1

Para que valores de x o perímetro do retângulo não é superior a 20 m?



Resolução:

1) Identificar a incógnita:

A incógnita representa o valor desconhecido, que se pretende determinar.

Neste caso, a incógnita já se encontra definida: x .

2) Traduzir o problema matematicamente, na forma de uma inequação:

$$\underbrace{(2x+2)+(x+2)+(2x+2)+(x+2)}_{\text{Perímetro do retângulo}} \underbrace{\quad\leqslant\quad}_{\substack{\text{não é superior,}\\ \text{logo é menor ou igual}}} 20$$

3) Resolver a inequação:

$(2x+2)+(x+2)+(2x+2)+(x+2) \leqslant 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x+8 \leqslant 20 \Leftrightarrow 6x \leqslant 12 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{12}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \leqslant 2$

$\text{C.S.} =]-\infty\,;\, 2]$

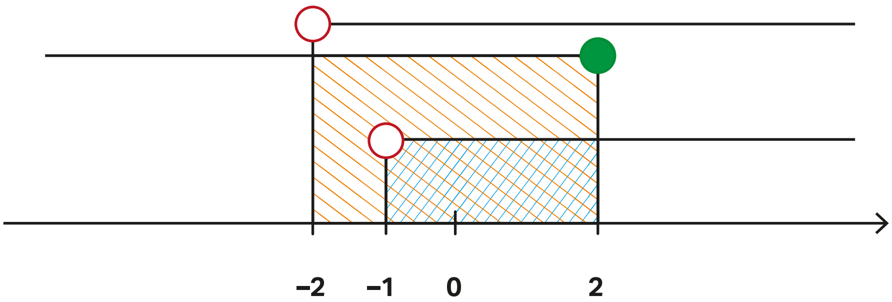
4) Interpretar o resultado da inequação no contexto do problema:

Como o valor de um comprimento tem de ser positivo, é necessário garantir que os comprimentos dos lados do retângulo sejam maiores do que zero.

$x \leqslant 2 \wedge 2x+2>0 \wedge x+2>0$

$x \leqslant 2 \wedge x>-1 \wedge x>-2$

$\text{C.S.} =]-\infty\,;\, 2] \cap]-1\,;\, +\infty[\cap]-2\,;\, +\infty[=]-1\,;\, 2]$



5) Responder ao problema:

O perímetro do retângulo não é superior a 20 m quando $x \in]-1\,;\, 2]$.

Problema resolvido 2

O Marcelo iniciou um trabalho como vendedor numa loja de equipamentos de telecomunicações. O seu salário mensal é de 34 000 escudos, mas por cada telemóvel que venda recebe mais 750 escudos.

Quantos telemóveis o Marcelo terá de vender, no mínimo, para que receba mais de 42 000 escudos num mês?

Resolução:

1) $x \longrightarrow$ número de telemóveis

Manual Digital

Exercícios
Resolver problemas usando inequações: idades

Resolver problemas usando inequações: perímetros

2) $34\,000 + 750x > 42\,000$

3) $34\,000 + 750x > 42\,000$

$750x > 42\,000 - 34\,000$

$750x > 8000$

$x > \dfrac{8000}{750}$

$x > 10{,}6(6)$

4) Como o número de telemóveis terá de ser um número inteiro não negativo, é necessário considerar o número inteiro superior a $10{,}6(6)$.

5) O Marcelo terá de vender no mínimo 11 telemóveis.

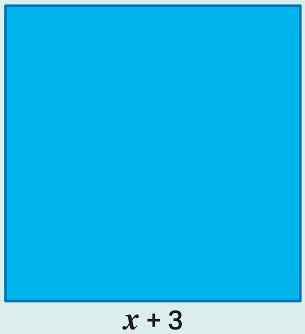
Exercícios

13 A Rita adquiriu um novo serviço para utilizar *internet* em sua casa. Ela paga um valor mensal fixo de 500 escudos e 100 escudos por cada *gigabyte* utilizado a mais. Sabendo que não quer gastar mais do que 2400 escudos por mês, quantos *gigabytes* poderá utilizar a Rita?

14 Quais são os dois maiores números ímpares consecutivos cuja soma é inferior a 225?

15 O quadrado representado na figura tem de lado $x + 3$.

Determina para que valores de x o perímetro do quadrado é menor do que 24.



16 A Bruna tem 5 anos e o seu pai tem 32.

Atualmente, a idade do pai é superior ao triplo da idade da Bruna.

Durante quantos anos se manterá esta situação?

17 Quais são os números naturais cujo dobro é menor do que 30 e cuja metade é maior do que 4?

Apresenta os cálculos que efetuares.

18 Um dos lados de um retângulo mede 14 cm. Qual poderá ser a medida do outro lado para que o perímetro seja inferior ou igual a 38 cm e a área seja superior ou igual a 70 cm^2.

Para aplicar

1 Indica os pares de inequações equivalentes.

1.1. $6 < x + 1$

1.2. $2x > 4$

1.3. $-2x > 3 + x$

1.4. $2x > 3 + x$

1.5. $2 < x$

1.6. $x < -1$

1.7. $-x - 1 > 2 - 2x$

1.8. $-x < -5$

2 Apresenta uma inequação cujo conjunto-solução seja: $S = [5\,;\,+\infty[$.

3 Averigua se $x = -1$ é solução da inequação: $2 + \frac{1 - x}{2} \leqslant 3$.

4 Considera a inequação: $6 - 3(2 - n) > 0$.
Determina o menor número inteiro n que verifica a inequação.

5 Resolve cada uma das inequações seguintes.

5.1. $6(x + 4) \leqslant 7(3 - 2x)$

5.2. $3 - \frac{2 - x}{3} \leqslant \frac{x}{5} + 4 - x$

5.3. $\frac{1}{2} - (x - 9) > -\frac{(2 - 2x)}{7}$

5.4. $0{,}2 \times (0{,}7x + 0{,}4) < 0{,}03x - \frac{5}{100}$

6 Determina o conjunto-solução de cada uma das seguintes condições.

6.1. $-3(2 - a) > 5 \ \wedge\ a > 7$

6.2. $\frac{4 - b}{2} \geqslant 1 \ \wedge\ 2b - 10 > 10$

6.3. $3(2 + c) \leqslant 55 \ \vee\ c < 3 - 2c$

7 Este ano, a Melissa já realizou 3 dos 4 testes da disciplina de Geografia, obtendo os resultados de 82 , 75 e 79 , numa escala de 0 a 100 pontos. Para obter uma média dos 4 testes de, pelo menos, 80 pontos, que resultados poderá obter a Melissa no último teste?
Apresenta o resultado obtido na forma de um intervalo de números reais.

7

Organização e Tratamento de Dados

Antes de começar

1 **Considera o seguinte conjunto de dados numéricos.**

3	4	5	3	6	8	5	2	6	5

1.1. Indica a moda do conjunto de dados.

1.2. Determina a média do conjunto de dados.

1.3. Determina a mediana do conjunto de dados.

1.4. Indica o valor mínimo e o valor máximo do conjunto de dados.

2 **Para conhecer melhor a qualidade da sua produção, a senhora Zulmira escolheu, ao acaso, alguns quiabos e registou a massa (em gramas) de cada um. Para organizar os dados, a senhora Zulmira utilizou um diagrama de caule-e-folhas.**

2	8	9	9								
3	1	3	3	3	3	5	6	7	7	8	9
4	0	0	2								

2.1. Quantos quiabos pesou a senhora Zulmira?

2.2. Qual é a mediana da massa dos quiabos?

2.3. Qual é o peso médio de um quiabo?

2.4. Comenta a afirmação:

"A moda da massa dos quiabos é de 37 gramas."

3 **A Maria registou as idades dos estudantes que participaram na prova de atletismo da sua escola:**

15	16	15	15	14	17	18
17	17	16	16	16	16	15
14	18	18	16	15	15	16
15	16	14	14	16	17	17
16	18	16	15	16	17	

3.1. Quantos estudantes participaram na prova de atletismo?

3.2. Organiza os dados num diagrama de caule-e-folhas.

3.3. Qual é a idade do estudante mais novo? E a idade do mais velho?

3.4. Qual é a moda das idades e qual é o seu significado?

4 **Nos cinco primeiros testes de Português, a Alícia obteve os seguintes resultados:**

68%	83%	62%	75%	80%

4.1. Determina a mediana dos resultados.

4.2. Determina a média dos resultados.

4.3. Se em cada teste de Português os resultados obtidos aumentassem 10%, qual seria a média dos resultados? Explica o teu raciocínio.

4.4. A Alícia conseguiu média de 75% após realizar o sexto e último teste. Que resultado obteve a Alícia no sexto teste?

5 **A tabela ao lado representa o número de irmãos dos 30 alunos de uma turma.**

5.1. Determina as frequências absolutas acumuladas.

5.2. Quantos alunos têm três irmãos ou menos?

5.3. Qual é a percentagem de alunos que têm mais de um irmão?

N.º de irmãos	Frequências absolutas
0	2
1	8
2	10
3	7
4	3
Total	**30**

6 **Os alunos de uma turma realizaram uma pesquisa entre os jovens de uma escola. A pesquisa realizada foi sobre a cor básica preferida de cada jovem: "vermelho", "azul" ou "amarelo". O resultado da pesquisa encontra-se na tabela. Sabe-se que cada jovem apenas indicou uma cor.**

Cor	N.º de jovens
Vermelho	140
Azul	180
Amarelo	80

6.1. Qual foi o total de jovens entrevistados?

6.2. Representa os dados através de um gráfico circular.

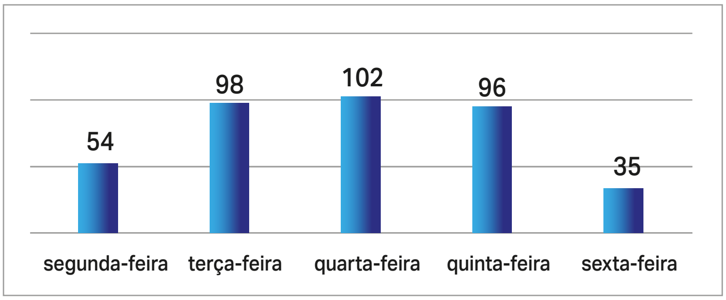
6.3. Alguma cor teve a preferência de mais de 50% dos jovens? Justifica a tua resposta.

6.4. Qual é a percentagem de jovens que escolheu a cor "amarela"?

6.5. No final desta pesquisa pode-se concluir que a cor preferida dos jovens entrevistados é a cor "azul"? Justifica a tua resposta.

Antes de começar

7 A senhora Zulmira tem aumentado o cultivo de quiabos. O gráfico de barras seguinte apresenta a massa de quiabos colhidos, em quilogramas, numa determinada semana.



7.1. Qual é a variável estatística em estudo?

7.2. Em que dia da semana foi colhida a maior quantidade de quiabos?

7.3. Que quantidade de quiabos foi colhida na terça-feira?

7.4. Qual é a quantidade total de quiabos colhida nessa semana?

7.5. Em média, quantos quiabos foram colhidos por dia?

8 Num estudo estatístico, foram recolhidos dados de diversas características de estudantes de um local.

ano de nascimento | género | n.º de irmãos | peso | cor dos olhos

idade | nacionalidade | local de nascimento | ano de escolaridade | cor preferida

8.1. Entre as variáveis estatísticas apresentadas, indica:

- **i)** as variáveis qualitativas;
- **ii)** as variáveis quantitativas.

8.2. Das variáveis quantitativas identificadas na alínea anterior, indica:

- **i)** as variáveis quantitativas discretas;
- **ii)** as variáveis quantitativas contínuas.

9 Os dados seguintes representam a altura, em centímetros, das jogadoras de futebol de uma equipa feminina.

162	155	166	167	153	173	151	157	168
170	156	161	171	174	169	165	160	176

9.1. Qual é a altura da jogadora mais baixa da equipa?

9.2. Qual é a amplitude dos dados? Qual é o seu significado no contexto do problema?

9.3. Sabendo que a guarda-redes principal é a segunda jogadora mais alta da equipa, qual é a altura da guarda-redes principal?

9.4. Qual é, em média, a altura das jogadoras?

9.5. Completa a seguinte tabela:

Classes	Frequência absoluta	Frequência relativa (em %)
[150 ; 155[		
[155 ; 160[		
[160 ; 165[	3	
[165 ; 170[		
[170 ; 175[		
[175 ; 180[		
Total		**100%**

10 **Os dados da tabela referem-se ao tempo gasto por um grupo de amigos de uma turma no percurso casa-escola em bicicleta.**

Tempo (em minutos)									
3	4	5	3	6	8	5	2	6	5
1	12	4	6	7	1	3	3	9	4

10.1. Qual é a diferença de tempo entre o amigo que demora mais tempo e o amigo que demora menos tempo?

10.2. Em média, quanto tempo demora cada amigo?

10.3. Organiza os dados numa tabela em intervalos de 2 minutos, começando pelo intervalo 0 a 2 minutos.

10.4. Qual é a percentagem de amigos que demoram 4 ou mais minutos?

7 Organização e Tratamento de Dados

7.1. Diagramas de extremos e quartis

7.1.1. Noção de quartil

Num conjunto de dados numéricos ordenados, os **quartis** são valores que dividem os dados em quatro partes de igual percentagem de ocorrência.

Como medidas de localização, os quartis permitem obter a indicação da variabilidade e a distribuição dos dados.

- O **2.º quartil** (Q_2), igual à **mediana** (M_d), é o valor que divide o conjunto em duas partes com o mesmo número de elementos.
  - Quando o número de dados é ímpar, a mediana (ou 2.º quartil) é o dado que ocupa a posição central: valor de ordem $\frac{n+1}{2}$.
  - Quando o número de dados é par, a mediana (ou 2.º quartil) é a média dos dois dados centrais: valores de ordem $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$.
- O **1.º quartil** (Q_1) é a mediana dos dados que ficam à esquerda do 2.º quartil.
- O **3.º quartil** (Q_3) é a mediana dos dados que ficam à direita do 2.º quartil.

Exemplo (com número ímpar de dados)**:**

Considere-se o seguinte conjunto de dados numéricos ordenados $(n=11)$:

					Q_2					
2	3	3	4	5	**5**	5	6	6	7	8

Para $n=11$, o valor de ordem do 2.º quartil é $\frac{n+1}{2}=\frac{11+1}{2}=6$.

$\boldsymbol{Q_2=M_d=5} \longrightarrow$ valor de ordem 6.

		Q_1			Q_2					
2	3	**3**	4	5	5	5	6	6	7	8

$\boldsymbol{Q_1=3} \longrightarrow$ mediana dos dados que ficam à esquerda do 2.º quartil.

		Q_1			Q_2			Q_3		
2	3	3	4	5	5	5	6	**6**	7	8

$\boldsymbol{Q_3=6} \longrightarrow$ mediana dos dados que ficam à direita do 2.º quartil.

Assim, os quartis do conjunto de dados numéricos são: $Q_1 = 3$, $Q_2 = 5$ e $Q_3 = 6$.

		Q_1			Q_2			Q_3		
2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	8

Manual Digital

Vídeo
Quartis

Exercício

1 **Considera o seguinte conjunto de dados numéricos:**

12	11	18	16	17	14	15	16	8

1.1. Ordena os dados por ordem crescente.

1.2. Determina a mediana e os quartis do conjunto de dados numéricos.

1.3. Indica os extremos (mínimo e máximo) do conjunto de dados numéricos.

Exemplo (com número par de dados)**:**

Considere-se o seguinte conjunto de dados numéricos ordenados $n = 12)$:

					$Q_2 = 5{,}5$						
1	2	3	3	4	**5**	**6**	6	7	8	9	9

Para $n = 12$, o Q_2 é a média dos valores de ordem $\frac{n}{2} = 6$ e $\frac{n}{2} + 1 = 7$.

$$Q_2 = M_d = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$$

		$Q_1 = 3$			$Q_2 = 5{,}5$						
1	2	**3**	**3**	4	5	6	6	7	8	9	9

$Q_1 = 3 \longrightarrow$ mediana dos dados que ficam à esquerda do 2.º quartil.

		$Q_1 = 3$			$Q_2 = 5{,}5$			$Q_3 = 7{,}5$			
1	2	3	3	4	5	6	6	**7**	**8**	9	9

$Q_3 = 7{,}5 \longrightarrow$ mediana dos dados que ficam à direita do 2.º quartil.

Assim, os quartis do conjunto de dados numéricos são: $Q_1 = 3$, $Q_2 = 5{,}5$ e $Q_3 = 7{,}5$.

Exemplo (com um diagrama de caule-e-folhas)

Analisemos a altura, em centímetros, das jogadoras de futebol de uma equipa feminina.

162	155	166	167	153	173	151	157	168
170	156	161	171	174	169	165	160	176

Podemos organizar estes dados num diagrama de caule-e-folhas da seguinte forma:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
15 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & & & \\
16 & 0 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
17 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6 & & &
\end{array}$$

Nesta situação temos $n = 18$ (18 dados).

Logo, Q_2 é a média dos valores de ordem $\frac{n}{2} = 9$ e ordem $\frac{n}{2} + 1 = 10$.

$$\begin{array}{c|cccccccc}
15 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & & & \\
16 & 0 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
17 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6 & & &
\end{array}$$

$$Q_2 = M_d = \frac{165 + 166}{2} = 165{,}5$$

> **Nota:**
> De notar que os dados estão representados num diagrama de caule-e-folhas, portanto os dados são 165 e 166.

$Q_1 = 157$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
15 & 1 & 3 & 5 & 6 & \boxed{7} & & & \\
16 & 0 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
17 & \boxed{0} & 1 & 3 & 4 & 6 & & &
\end{array}$$

$Q_3 = 170$

$Q_2 = 165{,}5$

$Q_1 = 157 \longrightarrow$ Mediana dos valores que ficam à esquerda do 2.º quartil.

$Q_3 = 170 \longrightarrow$ Mediana dos valores que ficam à direita do 2.º quartil.

Assim, os quartis referentes a estes conjuntos de dados são: $Q_1 = 157$, $Q_2 = 165{,}5$ e $Q_3 = 170$.

Manual Digital

Exercício
Analisar diagramas de extremos e quartis

Exercícios

2 O diagrama de caule-e-folhas apresenta os registos da massa (em gramas) de quiabos colhidos pela senhora Zulmira.

2	8	9	9								
3	1	3	3	3	3	5	6	7	7	8	9
4	0	0	2								

2.1. Determina Q_1 , Q_2 e Q_3 .

2.2. Determina a diferença entre o quiabo mais pesado e o quiabo mais leve.

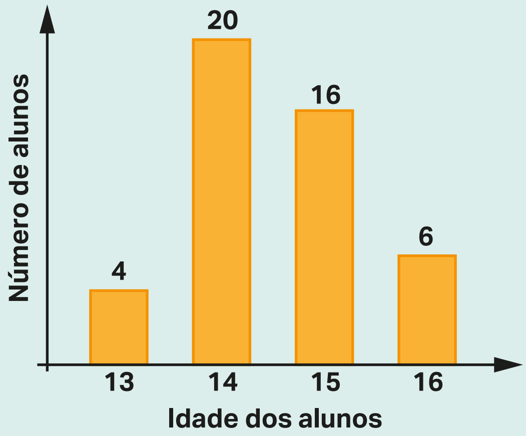
3 O gráfico ao lado representa a distribuição das idades dos alunos de uma turma.

3.1. Quantos alunos tem a turma?

3.2. Qual é a moda das idades dos alunos da turma?

3.3. Determina a mediana das idades dos alunos.

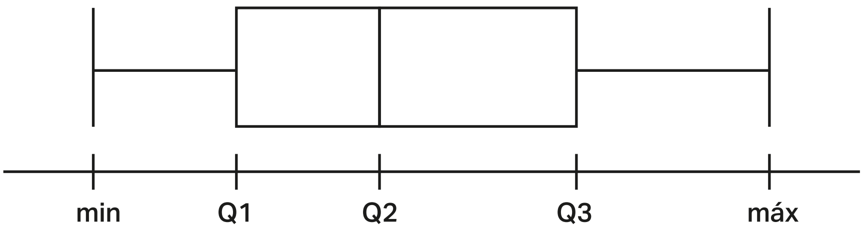
3.4. Determina os quartis das idades dos alunos.



3.5. Indica a idade do aluno mais novo e a idade do aluno mais velho.

7.1.2. Diagramas de extremos e quartis

O **diagrama de extremos e quartis** é uma representação gráfica que permite a interpretação da distribuição de dados numéricos. O diagrama de extremos e quartis divide os dados em partes iguais, cada uma contendo aproximadamente 25% dos dados do conjunto.



Para além de permitir identificar os quartis (Q_1, Q_2 e Q_3) e os extremos (máximo e mínimo) de um conjunto de dados numéricos, o diagrama de extremos e quartis permite realizar interpretações sobre a dispersão dos dados:

- A percentagem de dados maiores ou iguais a Q_1 é pelo menos 75%.
- A percentagem de dados maiores ou iguais a Q_2 é pelo menos 50%.
- A percentagem de dados menores ou iguais a Q_2 é pelo menos 50%.
- A percentagem de dados menores ou iguais a Q_3 é pelo menos 75%.
- A percentagem de dados maiores ou iguais a Q_1 e menores ou iguais a Q_3 é pelo menos 50%.

7.1.3. Amplitude interquartil

A **amplitude interquartil** é a diferença entre o 3.º quartil e o 1.º quartil de um conjunto de dados.

A **amplitude** é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo de um conjunto de dados numéricos.

A amplitude e a amplitude interquartil são medidas de dispersão.

Exercício

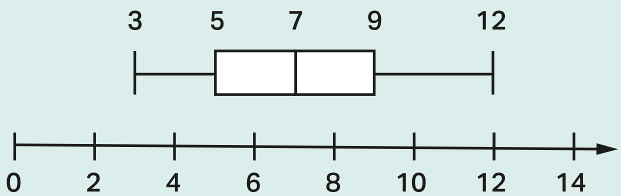
4 Observa o diagrama de extremos e quartis representado na figura.

4.1. Identifica os quartis.

4.2. Identifica os extremos.

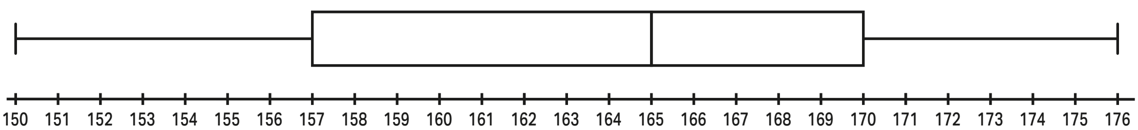
4.3. Determina a amplitude e a amplitude interquartil.

4.4. Comenta a afirmação:
"Pelo menos 75% dos dados são menores ou iguais a 9."



Exemplo:

O diagrama de extremos e quartis que representa a altura das jogadoras da equipa de futebol feminino é o seguinte:

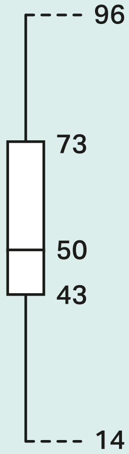


Podemos dizer que:

- A atleta com maior altura mede 176 cm.
- A atleta com menor altura mede 150 cm.
- A amplitude total é de 26 $(176 - 150 = 26)$.
- A amplitude interquartil é de 16 $(170 - 157 = 13)$.
- Pelo menos 25% das atletas medem mais do que 170 cm.
- Pelo menos 50% das atletas medem menos do que 165 cm.
- Pelo menos 75% das atletas medem mais do que 157 cm.

Exercício

5 **O diagrama de extremos e quartis vertical representado na figura representa as classificações obtidas pelos alunos de uma turma num teste da disciplina de Matemática.**



5.1. Qual foi a maior classificação obtida?

5.2. Qual foi a menor classificação obtida?

5.3. Determina a amplitude total e a amplitude interquartil.

5.4. Indica, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

I) *Pelo menos* 25% *dos alunos obtiveram classificação superior a* 73 *pontos.*

II) *Mais de metade dos alunos tiveram classificação inferior a* 50 *pontos.*

III) *Exatamente* 75% *dos alunos obtiveram classificação superior a* 43 *pontos.*

IV) 50% *dos alunos obtiveram pelo menos* 50 *pontos.*

7.1.4. Construção do diagrama de extremos e quartis

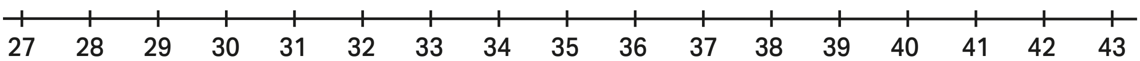
Para construir um diagrama de extremos e quartis são necessários cinco valores do conjunto de dados numéricos: os extremos (mínimo e máximo) e os quartis $(Q_1,\ Q_2 \text{ e } Q_3)$.

Construção de diagrama de extremos e quartis para o conjunto de dados numéricos:

28	29	29	31	33	33	33	33	35	36	37	37	38	39	40	40	42

$$\text{mínimo} = 28;\ Q_1 = 32;\ Q_2 = 35;\ Q_3 = 38{,}5;\ \text{máximo} = 42$$

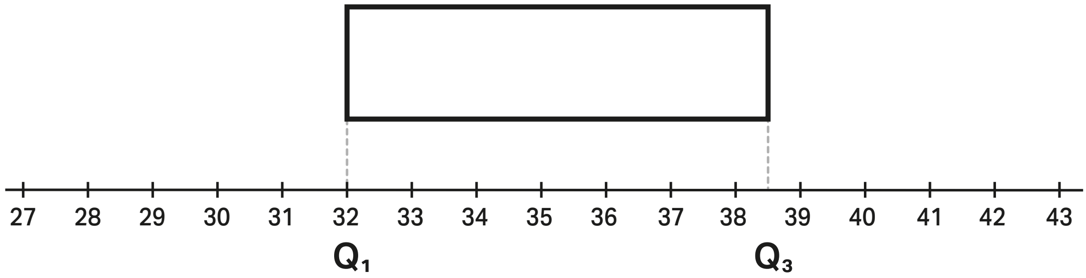
- Traça-se um eixo graduado para assinalar os extremos e os quartis. O eixo pode ser representado na horizontal ou na vertical.



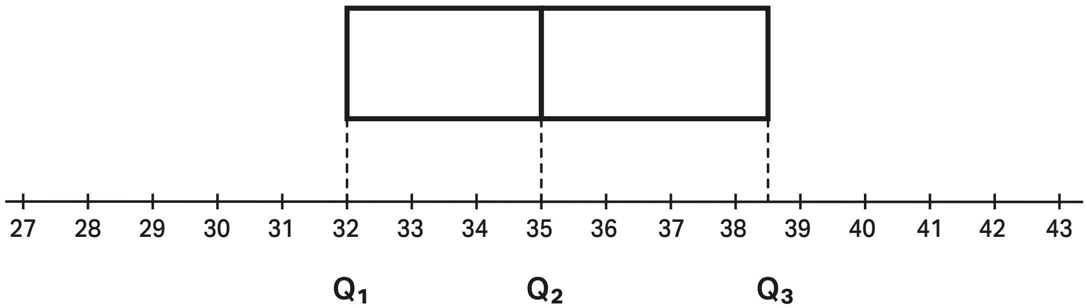
Manual Digital

Exercício
Determinar os quartis de uma distribuição

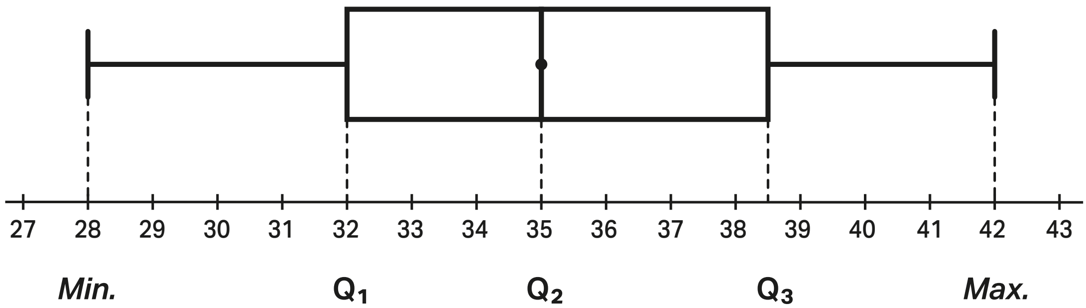
- Constrói-se um retângulo que corresponda ao intervalo entre Q_1 e Q_3.



- Divide-se o retângulo na graduação correspondente a Q_2.



- Traçam-se linhas que unam o mínimo a Q_1 e o máximo a Q_3.



Exercícios

6 **Constrói um diagrama de extremos e quartis para o seguinte conjunto de dados:**

2	3	3	4	5	5	6	6	7	8

7 **Considera um conjunto de dados em que: $\text{min} = 7$, $Q_1 = 9$, $Q_2 = 13$, $Q_3 = 16$ e $\text{max} = 18$.**

7.1. Determina a amplitude total dos dados.

7.2. Determina a amplitude interquartil.

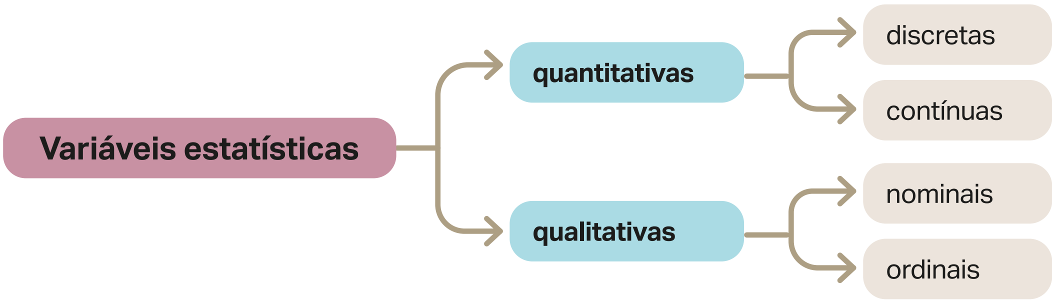
7.3. Constrói um diagrama de extremos e quartis vertical.

7.4. Indica dois dados que possam estar entre o 1.º quartil e o 3.º quartil.

7.2. Histogramas

7.2.1. Variáveis estatísticas discretas e contínuas

Uma **variável estatística** é uma característica que admite diferentes valores (um número ou uma modalidade), um por cada unidade estatística.



As **variáveis estatísticas** podem ser **quantitativas** (ou numéricas) quando estão associadas a uma característica suscetível de ser medida ou contada. Em caso contrário, as **variáveis estatísticas** são **qualitativas**.

Uma **variável quantitativa discreta** está associada a uma característica em que os valores são obtidos por contagem. Exemplos de variáveis quantitativas discretas: o número de irmãos, o número de filhos, o número de mensagens enviadas, etc.

Uma **variável quantitativa contínua** está associada a uma característica em que os valores são obtidos por medição. Exemplos de variáveis quantitativas contínuas: a altura de pessoas, o comprimento de objetos, o peso de animais, a idade de pessoas, etc.

Uma **variável qualitativa** está associada a uma característica que não pode ser contada ou medida. Exemplos de variáveis qualitativas: a cor dos olhos (castanhos, pretos, verdes, …), o estado civil (solteiro, casado, divorciado, …), etc. No caso de haver uma ordem inerente à variável qualitativa, esta diz-se ordinal, por exemplo, os meses do ano ou as classificações em provas obedecem a ordens. No caso contrário, dizem-se nominais.

Exercícios

8 **Das variáveis estatísticas a seguir apresentadas, indica quais são discretas e quais são contínuas.**

i) Número de quiabos colhidos num dia.
ii) Massa dos quiabos colhidos num dia.
iii) Temperatura de um forno.
iv) Tempo necessário para a confeção de um bolo.
v) Número de golos marcados num jogo.
vi) Distância percorrida por dia.
vii) Número de acessos diários a um *site*.

9 A turma da Rafaela quer fazer um estudo estatístico sobre algumas características dos alunos da turma. Ajuda a Rafaela a decidir 9 características a estudar (3 qualitativas, 3 quantitativas discretas e 3 quantitativas contínuas).

Manual Digital

Vídeo
Agrupar dados em classes

7.2.2. Tabelas de frequências para dados agrupados em classes

Num estudo estatístico, quando os dados estatísticos quantitativos (discretos ou contínuos) são em número elevado e variados, é útil agrupar os dados em classes.

As **classes** correspondem a intervalos de números reais, fechados à esquerda e abertos à direita.

Agrupar os dados em classes da mesma amplitude corresponde a reagrupar as unidades de uma população em classes, com base num conjunto de dados numéricos, de modo a que as classes tenham uma mesma amplitude pré-fixada.

A diferença entre os extremos de cada intervalo, amplitude do intervalo, corresponde à **amplitude da classe.** A classe que apresenta maior frequência de dados designa-se por **classe modal**.

Exemplo:

A tabela de frequências seguinte apresenta as classificações dos alunos de uma escola, agrupadas em classes, na Prova Concelhia de Matemática.

Classes	Frequência absoluta	Frequência relativa (em %)
$[0\,;\ 20[$	12	5%
$[20\,;\ 40[$	36	17%
$[40\,;\ 60[$	71	33%
$[60\,;\ 80[$	58	27%
$[80\,;\ 100[$	38	18%
Total	**215**	100%

A tabela permite agrupar dados de 215 estudantes em classes de amplitude igual a 20.

Neste caso, a classe modal é $[40\,;60[$.

Exercícios

10 **Num dia de colheita, a senhora Zulmira retirou, ao acaso, 50 quiabos para medir os seus comprimentos. Os dados seguintes apresentam as medidas obtidas, em centímetros.**

12	11	9	16	12	14	6	6	8	10
13	9	15	12	14	10	11	13	12	11
10	14	13	13	14	15	12	10	9	11
14	14	12	12	11	11	10	12	13	16
12	15	8	9	11	14	13	14	12	13

10.1. Organiza os dados recolhidos numa tabela de frequências, com classes de amplitude de 2 cm .

10.2. Indica a classe modal.

10.3. Indica a classe com menor frequência absoluta.

11 **A tabela de frequências seguinte agrupa as horas semanais de estudo dos alunos de uma escola.**

Classes	Frequência absoluta	Frequência relativa (em %)
[0 ; 2[	23	4%
[2 ; 4[	78	14%
[4 ; 6[	271	50%
[6 ; 8[	132	24%
[8 ; 10[	44	8%
Total	**548**	**100%**

11.1. Quantos alunos tem a escola?

11.2. Qual é a percentagem de alunos que estudam 8 horas ou mais por semana?

11.3. Qual é a classe modal? Indica o que significa no contexto do problema.

7.2.3. Histogramas

Manual Digital
Vídeo
Histogramas

Um histograma é um gráfico utilizado, especialmente, para estudar variáveis estatísticas quantitativas contínuas.

Dado um conjunto de dados agrupados em classes, um **histograma** é um gráfico de barras retangulares justapostas, tais que a área dos retângulos é diretamente proporcional à frequência absoluta (e, portanto, também à frequência relativa) da classe que representam.

Exemplos

a) Um grupo de alunos participou numa prova de Matemática. Os resultados obtidos pelos alunos, em percentagem, foram os seguintes:

64,2%	12,5%	16,5%	10,5%	68,5%	54,5%	77,3%
37,5%	14,9%	86,2%	61,2%	35,1%	19,4%	38,7%
51,4%	56,0%	40,7%	47,1%	78,3%	92,6%	71,7%

Agrupam-se os dados em classes de amplitude pré-fixada: 20.

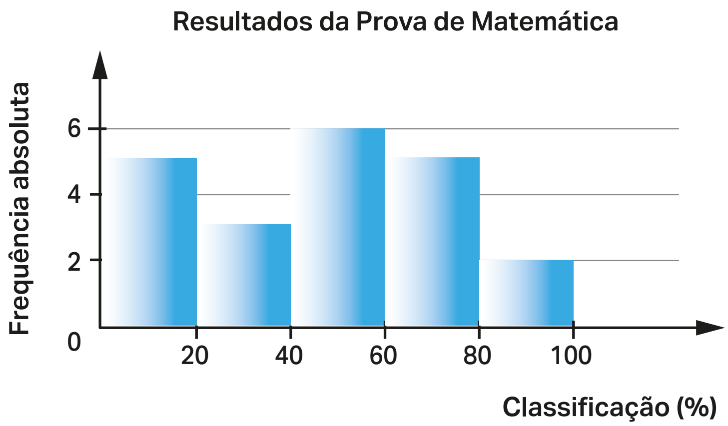
Classes	Frequência absoluta
$[0 ; 20[$	5
$[20 ; 40[$	3
$[40 ; 60[$	6
$[60 ; 80[$	5
$[80 ; 100[$	2
Total	**21**

As classes não são pontos isolados, mas sim intervalos.

Como se consideraram classes com a mesma amplitude, o histograma é formado por barras retangulares cujas bases têm por vértices os extremos de cada classe e cujas alturas correspondem à frequência absoluta da respetiva classe.

Manual Digital

Exercício
Interpretar um histograma



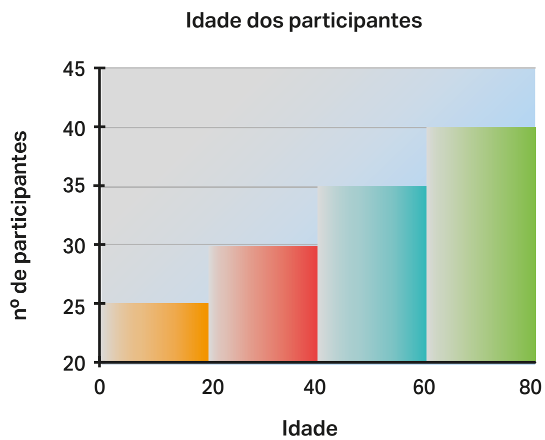
Os eixos são os indicadores que permitem a leitura das barras.

As barras retangulares têm a mesma largura e estão justapostas.

No eixo horizontal estão localizadas as classes.

No eixo vertical efetua-se a leitura da altura das barras, que corresponde à respetiva frequência absoluta ou relativa (neste exemplo utiliza-se a frequência absoluta).

b) A *Associação Cabo-verdiana para Apoio à Terceira Idade* realizou um convívio no Dia do Município do Porto Novo e de São João Batista, santo padroeiro do concelho. Foram recolhidos dados sobre a idade dos participantes. O histograma seguinte relaciona o n.º de participantes com as suas idades.



Os dados foram agrupados em 4 classes de amplitude 20.

Entre outras interpretações que o histograma permite fazer, destaca-se que:

- Adicionando o valor absoluto de cada classe, verificamos que participaram no convívio 130 pessoas.
- À medida que as classes agrupam pessoas com mais idade, aumenta o número de participantes.

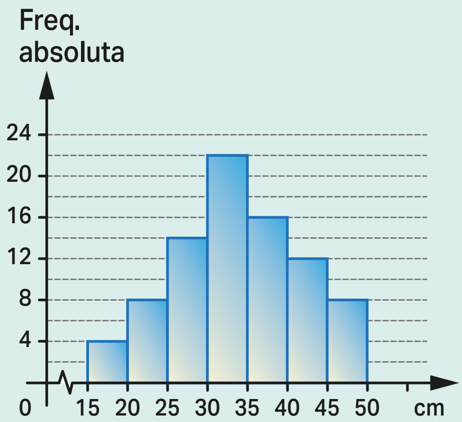
Manual Digital

Exercícios
Calcular medidas de dispersão

Relacionar tabelas de frequência com histogramas

Exercícios

12 Quando regressou com o seu barco de pesca, o senhor João mediu o comprimento, em centímetros, dos peixes que pescou. Agrupou os dados em classes e construiu o seguinte histograma.



12.1. Qual foi a amplitude utilizada pelo senhor João para agrupar as classes?

12.2. Em quantas classes agrupou o senhor João os comprimento dos peixes?

12.3. Quantos peixes pescou o senhor João?

12.4. Qual é a percentagem de peixes com comprimentos igual ou superior a 30 cm ?

12.5. Sabendo que o senhor João não pode vender peixes com comprimento inferior a 25 cm , quantos peixes pode vender o senhor João?

13 A escola da Luana vai participar numa atividade de limpeza das praias.
Os alunos formaram grupos e registaram a quantidade de lixo, em quilogramas, que recolheram, ao fim de duas horas de atividade. O grupo da Luana recolheu 12,4 kg de lixo.
Os resultados obtidos por cada grupo, em quilogramas, foram os seguintes:

7,3	12,1	6,5	4,3	9,0	5,1	6,3
5,2	7,6	7,3	10,2	11,5	8,2	4,0
8,9	15,2	6,3	9,8	10,3	3,9	6,0
10,4	12,4	10,1	7,7	5,9	11,7	14,2

13.1. Quantos grupos participaram na atividade?

13.2. Agrupa os dados em classes de amplitude 3 .

13.3. Constrói um histograma que relacione as frequências absolutas com a quantidade de lixo recolhida.

13.4. Os 3 grupos que recolherem mais lixo ganham um prémio. O grupo da Luana vai ter direito ao prémio?

Para aplicar

1 **A tabela seguinte apresenta a idade dos alunos de uma turma.**

Idade	N.º de alunos
13	6
14	18
15	7
16	2

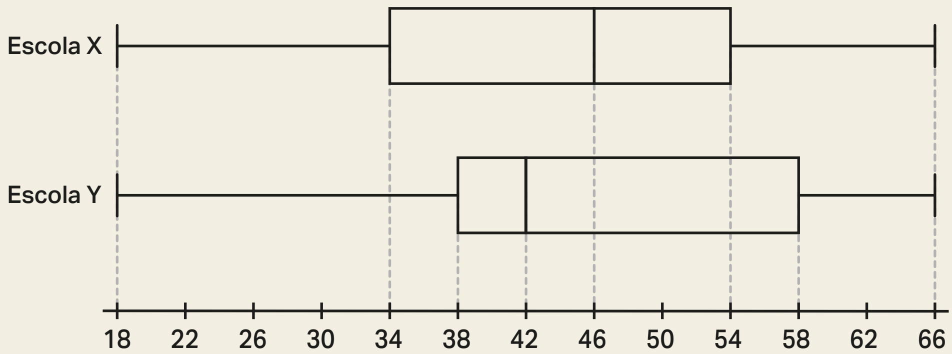
1.1. Quantos alunos tem a turma?

1.2. Qual é a moda das idades dos alunos? Justifica a tua resposta.

1.3. Determina os quartis das idades dos alunos da turma.

1.4. Comenta a afirmação:
"Pelo menos 75% dos alunos têm idade inferior ou igual a 15 anos."

2 **Nos seguintes diagramas de extremos e quartis estão representadas as idades dos funcionários da escola X e da escola Y.**



2.1. Indica se as seguintes frases são verdadeiras ou falsas e corrige as falsas.

a) O funcionário mais velho da escola X tem 54 anos e o funcionário mais velho da escola Y tem 58 anos.

b) A amplitude interquartil das idades na escola Y é 20.

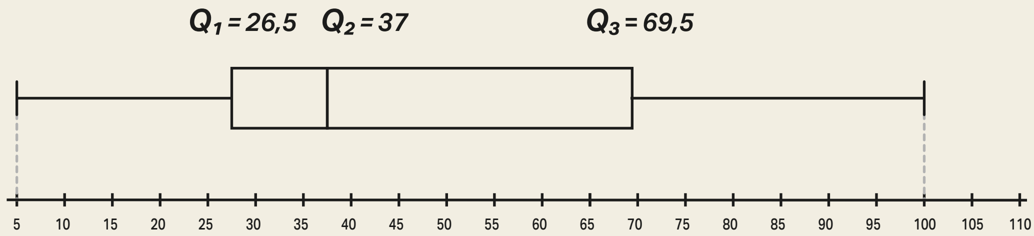
c) A amplitude das idades na escola X é 36.

d) Na escola X, 75% dos funcionários têm 34 anos de idade ou mais.

e) Na escola Y, 25% dos funcionários têm 34 anos de idade ou menos.

Para aplicar

3 O seguinte diagrama de extremos e quartis apresenta a distribuição do preço (em milhares de escudos) dos telemóveis que uma loja vende.



3.1. Indica o preço do telemóvel mais barato.

3.2. Indica o preço do telemóvel mais caro.

3.3. Qual das afirmações é verdadeira?

i) 25% dos telemóveis custam menos de 26 500 escudos.

ii) O valor médio do custo dos telemóveis é 37 000 escudos.

iii) 50% dos telemóveis custam mais de 26 500 escudos.

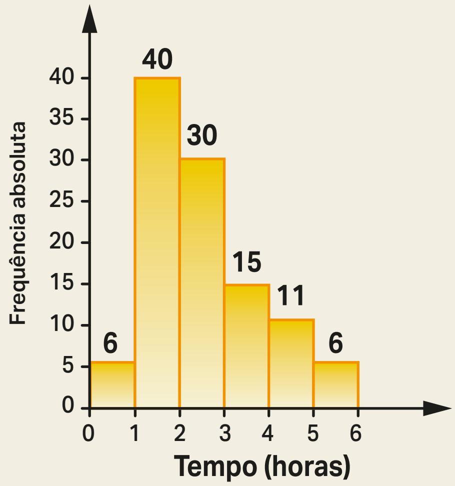
iv) Pelo menos 75% dos telemóveis custam 69 500 escudos ou menos.

4 Em grupo ou individualmente, regista as idades dos alunos da tua turma. Com os dados obtidos, constrói um diagrama de extremos e quartis e interpreta o diagrama construído.

Para aprofundar o estudo estatístico das idades dos alunos da tua turma, completa o teu trabalho determinando:

- a média;
- a moda;
- a mediana;
- o valor máximo e o valor mínimo;
- a amplitude total e a amplitude interquartil.

5 **Os resultados de um inquérito realizado a todos os alunos do 9.º ano de uma escola, acerca do número de horas que jogam computador por semana, estão apresentados no seguinte gráfico.**



5.1. Quantos alunos tem o 9.º ano nesta escola?

5.2. Identifica a variável estatística em estudo e classifica-a quanto à sua natureza.

5.3. Indica o nome do tipo de gráfico utilizado na figura para representar o número de horas semanais que os alunos jogam computador.

6 **Os alunos de uma turma registaram a distância, em quilómetros, de casa à escola.**
Os resultados obtidos, em quilómetros, foram os seguintes:

4,3	0,4	0,6	1,9	3,7	5,9	1,8
0,5	2,9	1,4	2,1	4,2	5,3	1,3
1,1	3,0	6,7	0,7	0,4	5,5	2,8
3,5	1,1	1,1	4,1	5,4	0,9	0,9
2,0	2,9	1,7	0,3	6,2	6,3	3,9
5,4	2,1	2,9	3,3	1,3	0,5	0,7

6.1. Quantos alunos tem a turma?

6.2. Agrupa os dados em classes de amplitude 1 .

6.3. Constrói um histograma que relacione a distância de casa à escola, usando as frequências absolutas.

6.4. Indica o número de alunos que vivem a menos de um quilómetro da escola.

6.5. Determina a percentagem de alunos que vivem a cinco ou mais quilómetros da escola.

Para aplicar

7 A tabela de frequências agrupa as horas semanais de estudo dos alunos de uma escola.

Classes	Frequência absoluta	Frequência relativa (em %)
[0 ; 2[	23	4%
[2 ; 4[	78	14%
[4 ; 6[	271	50%
[6 ; 8[	132	24%
[8 ; 10[	44	8%
Total	**548**	**100%**

7.1. Indica a amplitude das classes.

7.2. Constrói um histograma que relacione as horas semanais de estudo dos alunos, usando as frequências relativas.

7.3. Qual é a relação entre a área da barra retangular da classe de intervalo [0 ; 2[e a área da barra retangular da classe de intervalo [6 ; 8[?

8 Seguindo as indicações do professor, em grupos, escolham uma característica correspondente a uma variável estatística quantitativa contínua (por exemplo: altura dos alunos, peso dos alunos, tempo que demoram de casa à escola, etc.).

- Recolham os dados necessários e determinem medidas estatísticas que permitam a análise dos dados.
- Construam um diagrama de extremos e quartis e um histograma.
- Apresentem o trabalho aos restantes grupos.

Anexos

Tabela trigonométrica

Graus	Seno	Cosseno	Tangente
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	0,0872	0,9962	0,0875
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	0,1736	0,9848	0,1763
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493
15	0,2588	0,9659	0,2679
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	0,3420	0,9397	0,3640
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	0,6428	0,7660	0,8391
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	0,7071	0,7071	1,0000

Graus	Seno	Cosseno	Tangente
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504
50	0,7660	0,6428	1,1918
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
55	0,8192	0,5736	1,4281
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	0,8660	0,5000	1,7321
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	0,9063	0,4226	2,1445
66	0,9135	0,4067	2,2460
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	0,9397	0,3420	2,7475
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2708
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	0,9659	0,2588	3,7321
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	0,1908	5,1445
80	0,9848	0,1736	5,6713
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	0,9962	0,0872	11,4301
86	0,9976	0,0698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900

Matemática 9.º ano

Criação Intelectual
Filipe José Alves do Couto

Revisão científica
Universidade
de Cabo Verde

Design
Porto Editora

Créditos fotográficos
Shutterstock.com
Porto Editora

Edição
2023

Cabo Verde

Brasão

Bandeira

Hino Nacional

Cântico da Liberdade

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza.

Com dignidade, enterra a semente
No pó da ilha nua;
No despenhadeiro da vida
A esperança é do tamanho do mar
Que nos abraça,
Sentinela de mares e ventos
Perseverantes
Entre estrelas e o Atlântico
Entoa o cântico da liberdade.

Canta, irmão
Canta, meu irmão
Que a liberdade é hino
E o homem a certeza!